

数学物理方法讲义

邵煜

复旦大学

2025 年春

目录

1	复数和复变函数	10
1.1	复数定义的动机	10
1.2	复数定义和基本运算	15
1.3	复平面	17
1.4	极坐标	19
1.5	欧拉公式	20
1.6	复指数函数	30
1.7	复函数的映射表示	33
1.8	关于计算机软件 Mathematica 的使用	36
1.9	辐角函数	40
1.10	分支与割线的简要总结	44
1.11	复对数函数	45
1.12	逆欧拉公式	52
1.13	莫瓦尔公式	52
1.14	复数乘法的矩阵表示	53
2	解析函数	55
2.1	导数初步	55
2.2	开圆盘、去心开圆盘与开区域	57
2.3	极限与连续函数	58
2.4	无穷远点	63
2.5	复函数的导数与解析函数	67
2.6	柯西-黎曼方程	69
2.7	柯西-黎曼方程的递归性质	74
2.8	复变函数汇总	76

2.9	复合函数	84
3	多变量微积分回顾	87
3.1	符号约定	87
3.2	曲线的参数化	87
3.3	向量场的曲线积分	90
3.4	格林定理	93
4	复变积分	99
4.1	复变积分的基本概念	99
4.2	复变积分	100
4.3	复变积分的基本定理	103
4.4	路径无关性	105
4.5	柯西定理	109
4.6	柯西定理的推广	112
4.7	柯西积分公式	115
4.8	导数柯西积分公式	118
4.9	柯西定理的证明	128
4.10	导数柯西积分公式的证明	131
4.11	柯西积分公式的其他推论	133
5	解析函数的无穷级数展开	139
5.1	复数级数	139
5.2	函数级数	143
5.3	几何级数	145
5.4	幂级数的收敛性	147
5.5	解析函数的泰勒展开	150
5.6	奇点	157
5.7	解析函数的洛朗展开	158

5.8	极点	165
6	留数定理及其应用	170
6.1	极点与零点	170
6.2	全纯函数与亚纯函数	172
6.3	留数	173
6.4	柯西留数定理	185
6.5	无穷远点的留数	192
6.6	留数定理的应用	195
6.7	无穷积分	196
6.8	三角函数的积分	205
6.9	包含割线的积分	207
6.10	柯西主值	213
6.11	圆弧积分	217
7	通过积分和级数定义的实函数回顾	222
7.1	通过积分定义的函数	223
7.2	通过级数定义的函数	228
8	伽马函数	232
8.1	解析延拓	233
8.2	伽马 Γ 函数	238
8.3	黎曼 ζ 函数的定义与积分表示	244
9	傅里叶变换	249
9.1	傅里叶级数回顾	249
9.2	狄拉克 δ 函数回顾	258
9.3	傅里叶变换	279
9.4	傅里叶变换的在求解微分方程中的应用	295

10 拉普拉斯变换	300
10.1 拉普拉斯变换的定义	300
10.2 拉普拉斯变换的收敛性	302
10.3 拉普拉斯变换的主要性质	303
10.4 拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用	309
10.5 拉普拉斯逆变换	310
11 偏微分方程	314
12 微分方程在物理学中的应用	315
12.1 分离变量法	317
12.2 笛卡尔坐标系中的分量变量法	320
12.3 柱坐标系中的分量变量法	323
12.4 球坐标系中的分量变量法	325
13 一阶微分方程	327
13.1 一阶微分方程的标准形式	328
13.2 积分因子	332
13.3 一阶线性微分方程	337
14 二阶线性微分方程	343
14.1 线性性、叠加原理与解的唯一性	344
14.2 朗斯基行列式	347
14.3 第二个解的构造	350
14.4 非齐次二阶线性微分方程的通解	353
14.5 施图姆-刘维尔理论	356
14.6 常系数线性微分方程	365
15 拉普拉斯方程：笛卡尔坐标系	377
15.1 解的唯一性	378

15.2 笛卡尔坐标系中的拉普拉斯方程	380
16 拉普拉斯方程：球坐标系	391
16.1 弗罗贝尼乌斯方法	393
16.2 勒让德多项式	395
16.3 勒让德微分方程的第二个解	405
16.4 完整解	407
16.5 勒让德多项式的性质	412
16.6 勒让德多项式展开	420
16.7 物理实例	423
16.8 补充材料：多极展开 (Multipole Expansion)	428
17 拉普拉斯方程：柱坐标系	431
17.1 常微分方程的分离	432
17.2 贝塞尔微分方程的解	434
17.3 贝塞尔方程的第二个解	437
17.4 贝塞尔函数的性质	439
17.5 贝塞尔函数展开	447
17.6 物理实例	451
18 数学物理中的其他偏微分方程	455
18.1 热传导方程	456
18.2 薛定谔方程	462
18.3 波动方程	478
19 格林函数初步	481
19.1 傅里叶变换与格林函数	481
19.2 拉普拉斯算符的格林函数	485
19.3 热传导方程的格林函数	486

19.4 波动方程的格林函数	488
20 变分法初步	490
20.1 变分问题	492
20.2 二次变分	496
20.3 带约束的变分问题	498

1 复数和复变函数

1.1 复数定义的动机

方程 $x^2 = -1$ 在实数范围内没有解，但我们知道这个方程是自然出现的，我们希望使用它的根。因此，我们引入一个新的符号来表示该方程的根，并称其为复数 (complex number)。

定义 1.1 符号 $\pm i$ 代表方程 $x^2 = -1$ 的解。我们称这些新数为复数 (complex numbers)。此外，我们定义：

$$\sqrt{-1} := i. \quad (1.1)$$

数 i 被称为虚数单位 (imaginary unit)。在正式学习复数的代数和几何性质之前，我们先来看一个简单的例子。

例 1.1 (求解二次方程) 求解方程：

$$z^2 + z + 1 = 0. \quad (1.2)$$

解： 应用求根公式：

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}. \quad (1.3)$$

由于 $\sqrt{-1} = i$ ，我们可以进一步化简：

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}. \quad (1.4)$$

1.1.1 代数基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)

引入复数的一个重要原因是，在允许复数根的情况下，每个多项式都具有预期的根数。这一结论被称为代数基本定理 (Fundamental Theorem of Algebra)。

定理 1.1 (代数基本定理) 设 $P(x)$ 是一个次数为 n 的复系数多项式：

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0. \quad (1.5)$$

则 $P(x)$ 在复数范围内恰好有 n 个复根 (若有重根，则按重数计算)。

1.1.2 复数的历史故事

在 16 世纪上半叶，数学的态度和精神几乎没有发生任何变化，仍然延续了阿拉伯数学家的传统，他们的工作主要集中在实用的算术计算上。欧洲数学家只是沿袭了阿拉伯人的研究方式，并在此基础上有所扩展。此外，文艺复兴时期的技术进步促进了对三角函数表、天文观测等量的进一步精确化。

到了 1500 年左右，零已被普遍接受为一个数，而无理数在计算中也得到了更自由的使用。然而，人们仍然对无理数是否真正算作“数”感到困惑。德国数学家 迈克尔·斯蒂费尔（Michael Stifel, 1486?-1567）曾对此进行论证：

由于在几何证明中，当有理数无法满足要求时，无理数……恰好可以证明那些有理数无法证明的内容...，我们不得不承认它们确实是数。

另一方面，... 不能称为真正的数的是这样一种对象：它缺乏精确的十进制表示。

斯蒂费尔因此认为，只有整数或分数才可被称为真正的数，而无理数既非整数也非分数，因此它们不是真正的数。甚至到了一个世纪后，帕斯卡（Pascal）、巴罗（Barrow）和牛顿（Newton）仍然认为无理数应当从几何量的角度来理解，它们仅仅是没有独立存在意义的符号，而只是连续几何量的象征。

负数的争议

在 16 至 17 世纪，数学家们同样对负数持怀疑态度，认为它们是“荒谬的”（absurd）。卡丹（G. Cardan, 1501-1576），这位文艺复兴时期杰出的意大利数学家，虽然接受了负数作为方程的解，但仍然将其称为“虚构的”（fictitious），而将正根称为真实的。16 世纪最重要的法国数学家之一，律师出身的弗朗索瓦·韦达（François Viète, 1540-1603）则完全拒绝使用负数。法国数学家笛卡尔（René Descartes, 1596-1650）部分接受了负数，但仍称负根为“虚假（false）解”，理由是它们表示的数比“无（nothing）”还要小。

关于负数的一个有趣的反对意见来自安托万·阿尔诺（Antoine Arnauld, 1612-1694），他是一位神学家兼数学家，也是帕斯卡的挚友。阿尔诺质疑比值关系 $-1 : 1 = 1 : (-1)$ ，他的理由是 -1 小于 $+1$ ，那么一个较小的数怎么能与一个较大的数形成与反向相同的比例关系呢？

复数的诞生

在尚未完全克服对无理数和负数的困惑时，欧洲数学家又遇到了新的难题——复数！在求解二次方程时，他们自然而然地扩展了平方根运算。卡丹在其研究中提出了这样一个问题：将 10 分成两部分，使其乘积为 40。这个问题可表述为方程

$$x(10 - x) = 40 \quad (1.6)$$

该方程的解为 $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ 。他计算后写道：

暂且抛开计算过程中的精神折磨，我们将这两个根相乘，结果得到 $25 - (-15) = 40$ 。

但他随后又写道：

算术的微妙推演继续前行，尽管其最终结果，正如人们所说的那样，既精妙又无用。

笛卡尔也拒绝接受复数，并称其为假想的（imaginary）。即使是牛顿，也没有赋予复数实际意义，可能是因为在他的时代，复数尚未有明确的物理解释。复数所带来的困惑可以从莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）的经典言论中窥见一斑：

神圣的精神以一种非凡的方式在这一分析的奇迹中展现出来，这是一种理想世界的预兆，是存在与非存在之间的两栖生物，我们称之为负单位的虚根。

复数在其诞生之初饱受质疑，但最终成为数学的重要基石，并在后世的数学分析、物理学、电子工程等诸多领域中发挥了至关重要的作用。

1.1.3 复数在量子物理中的重要性

在经典力学或麦克斯韦理论中，复数有时是有用的，但并非必需。它们的动力学变量（对应于可测量的物理量）都不是复数。事实上，在物理学中，所有测量结果都是实数。然而，在量子力学中，复数却是基本的。

薛定谔方程中的复数 薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (1.7)$$

显式地涉及虚数单位 i ，这使得方程无法仅有实数解。实际上，波函数（作为量子力学的动力学变量）本身是一个复函数，波函数可以依赖于粒子的位置 $\mathbf{x}$ 和时间 t ，即：

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}, \quad \text{对于所有的 } \mathbf{x} \text{ 和 } t. \quad (1.8)$$

在空间的每个点以及任意时刻，波函数的值是一个复数。薛定谔方程的解允许 Ψ 以波的形式存在。常见的波动方程涉及对时间的二阶偏导数，而薛定谔方程只涉及时间一阶偏导数，其中 i 作为乘子出现在时间导数前。

由于复数不能被直接测量，因此波函数与物理可观测量之间的关系是间接的。玻恩（Born）提出了一种自然的解释：概率应当始终是非负实数，而概率的计算方式是取波函数的模的平方。若量子系统的波函数为 Ψ ，那么某些可能事件发生的概率由 $|\Psi|^2$ 计算。因此，波函数 Ψ 通常被称为概率幅（probability amplitude）。薛定谔方程本身并不是一个描述概率演化的方程，而是描述概率幅演化的方程。

1.2 复数定义和基本运算

定义 1.2 复数 (Complex numbers) 定义为所有形如¹

$$z := x + iy$$

的数的集合，其中 x 和 y 为实数。

- 我们用 $\mathbb{C}$ 表示所有复数的集合。
- 我们称 x 为 z 的实部，记作 $x = \operatorname{Re}(z)$ 。
- 我们称 y 为 z 的虚部，记作 $y = \operatorname{Im}(z)$ 。注意: z 的虚部是一个实数，它不包含 i 。

基本的算术运算遵循标准规则，只需记住 $i^2 = -1$ 。

- 加法: $(3 + 4i) + (7 + 11i) = 10 + 15i$
- 减法: $(3 + 4i) - (7 + 11i) = -4 - 7i$
- 乘法: $(3 + 4i)(7 + 11i) = 21 + 28i + 33i + 44i^2 = -23 + 61i$ ，其中 $44i^2 = -44$ 。

1.2.1 复共轭

复共轭 (Complex conjugation) 可以用一个上横线或右上角 $*$ 表示，定义如下：

$$\overline{x + iy} := x - iy$$

如果 $z = x + iy$ ，则其复共轭为 $z^* = \bar{z} := x - iy$ 。

例 1.2

$$\overline{3 + 5i} = 3 - 5i.$$

以下是一个非常有用的复共轭性质：如果 $z = x + iy$ ，则

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

注意， $z\bar{z}$ 是实数。我们将在下一个例子中利用这个性质来帮助做除法运算。

例 1.3 将 $\frac{3+4i}{1+2i}$ 写成标准形式 $x + iy$ 。

解： 使用复共轭的性质来化简分母

$$\frac{3 + 4i}{1 + 2i} = \frac{3 + 4i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{11 - 2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i.$$

¹本讲义中，我们使用符号 $:=$ 表示定义。

1.2.2 复数的模

复数 $x + iy$ 的模 (magnitude) 定义为

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

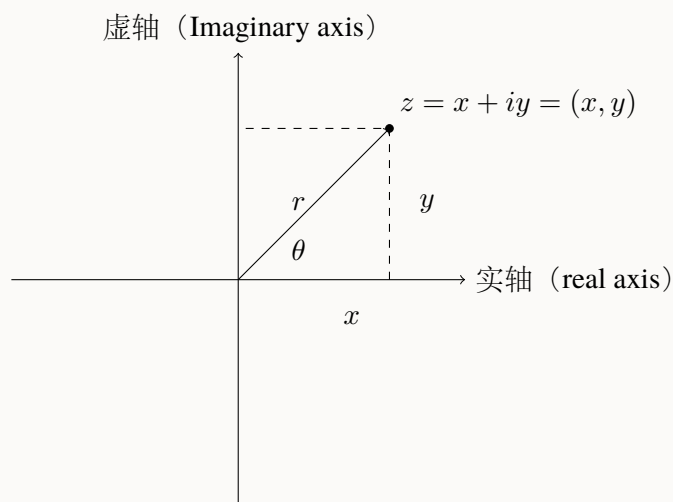
例 1.4

$3 + 5i$ 的模为 $\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

1.3 复平面

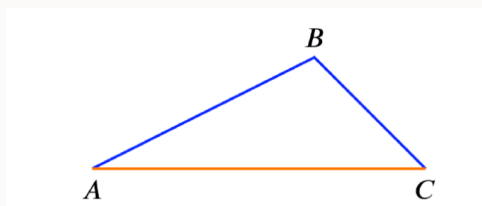
1.3.1 复数的几何表示

由于描述复数 $z = x + iy$ 需要两个数 x 和 y ，我们可以将复数视为 xy -平面上的点。当我们这样做时，我们称之为复平面。因为 x 是 z 的实部，所以我们称 x -轴为实轴。同样， y -轴为虚轴。



1.3.2 三角不等式

三角不等式指出，对于一个三角形，任意两边的长度之和大于第三边的长度。



$$\text{三角不等式: } |AB| + |BC| > |AC|$$

对于复数，三角不等式可以转换为关于复数模的关系。具体来说，对于复数 z_1 和 z_2 ，有

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

当且仅当 z_1 和 z_2 中有一个为零，或 z_1 和 z_2 位于同一射线上时，才取等号。

1.4 极坐标

在上图中，我们标记了从原点到点 $z = x + iy$ 的向量的长度 r 和极角 θ 。这些与之前看到的极坐标相同。对于 r 和 θ 有多个同义词：

$$r = |z| = \text{模} = \text{长度} = \text{绝对值}$$

$$\theta = \arg(z) = \text{复数 } z \text{ 的辐角} = \text{极角}$$

例 1.5 我们为一些复数 z , r 和 θ 制作一个表格。注意， θ 并不唯一定义，因为我们总是可以为 θ 加上 2π 的倍数，且仍然位于平面上的同一点。

$z = a + bi$	r	θ	解释
1	1	$0, 2\pi, 4\pi, \dots$	辐角 = 0, 意味着 z 在 x -轴上
i	1	$\pi/2, \pi/2 + 2\pi, \dots$	辐角 = $\pi/2$, 意味着 z 在 y -轴上
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4, \pi/4 + 2\pi, \dots$	辐角 = $\pi/4$, 意味着 z 在 x -轴的 45° 射线上

当我们想要明确指明 θ 的值时，我们会指定辐角的范围。例如， $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$ 。辐角的分支（branch）将成为复分析的关键要求之一。

1.5 欧拉公式

欧拉公式 (Euler's formula) 联系了复数指数、极坐标以及正弦和余弦函数。它将繁琐的三角恒等式转化为简洁的指数规则。公式如下：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (1.9)$$

有许多不同的方法可以推导欧拉公式。我们可以直接将上式作为复指数的定义，同时证明这是一个“好”的定义。为了证明这一点，我们需要展示 $e^{i\theta}$ 符合指数的所有常见规则。因此，我们将系统地检查指数的性质，并验证它们在复指数的情况下是否成立。

1.5.1 $e^{i\theta}$ 具有指数的性质

我们将展示 $e^{i\theta}$ 确实遵循指数函数的基本性质。

- **性质 1:** e^{it} 的导数符合指数的微分规则：

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it} \quad (1.10)$$

证明： 这直接来源于欧拉公式的定义：

$$\begin{aligned} \frac{de^{it}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos(t) + i \sin(t)) \\ &= -\sin(t) + i \cos(t) \\ &= i(\cos(t) + i \sin(t)) \\ &= ie^{it} \end{aligned} \quad (1.11)$$

证毕。

- **性质 2:** 当 $t = 0$ 时：

$$e^{i \cdot 0} = 1 \quad (1.12)$$

证明： 这直接来源于欧拉公式的定义：

$$e^{i \cdot 0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1. \quad (1.13)$$

证毕。

- **性质 3:** 指数的加法规则成立：

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \quad (1.14)$$

证明： 这个结论依赖于正弦和余弦的加法公式以及欧拉公式：

$$\begin{aligned} e^{ia} \cdot e^{ib} &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b) \\ &= \cos(a + b) + i \sin(a + b) \\ &= e^{i(a+b)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

证毕。

- **性质 4:** $e^{i\theta}$ 的定义与 e^x 的幂级数一致。

证明: 回顾 e^x 、 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的幂级数:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

现在我们可以写出 $e^{i\theta}$ 的幂级数，并将其拆分为正弦和余弦的幂级数:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.17)$$

因此，欧拉公式的定义与 e^x 的幂级数一致，证毕。

以上性质 1 到 4 说明了 $e^{i\theta}$ 确实具有指数函数的性质。

1.5.2 复指数与极坐标表示

现在让我们来看极坐标与复指数之间的关系。假设复数 $z = x + iy$ 具有极坐标形式 (r, θ) ，即

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

因此，我们得到以下重要关系:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r \cos(\theta) + ir \sin(\theta) \\ &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= re^{i\theta}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

这个公式非常重要，务必理解它。我们也可以省略中间步骤，直接记为:

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (1.19)$$

由于 r 和 θ 是点 (x, y) 的极坐标，我们称 $z = re^{i\theta}$ 为复数 z 的极坐标形式。

现在我们来验证，复数的模、辐角、共轭、乘法和除法在极坐标下的计算变得非常简单。

- **模 (Magnitude)**

对于单位指数 $e^{i\theta}$:

$$|e^{i\theta}| = 1. \quad (1.20)$$

证明： 由欧拉公式：

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| \\ &= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

这意味着 $e^{i\theta}$ 总是位于单位圆！同样，如果 $z = re^{i\theta}$ ，则

$$|z| = r. \tag{1.22}$$

- **辐角 (Argument)**

如果 $z = re^{i\theta}$ ，那么

$$\arg(z) = \theta. \tag{1.23}$$

- **共轭 (Conjugate)**

复数 $z = re^{i\theta}$ 的共轭为：

$$\bar{z} = re^{-i\theta}. \tag{1.24}$$

证明： 由共轭的定义：

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \\ &= r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= re^{-i\theta}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

这表明共轭运算会改变复数辐角的正负号。

- **乘法 (Multiplication)**

如果 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ ， $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ ，则：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{1.26}$$

这个结论非常直观：两个复数相乘时，它们的模相乘，辐角相加。

- **除法 (Division)**

同理，对于两个复数的除法：

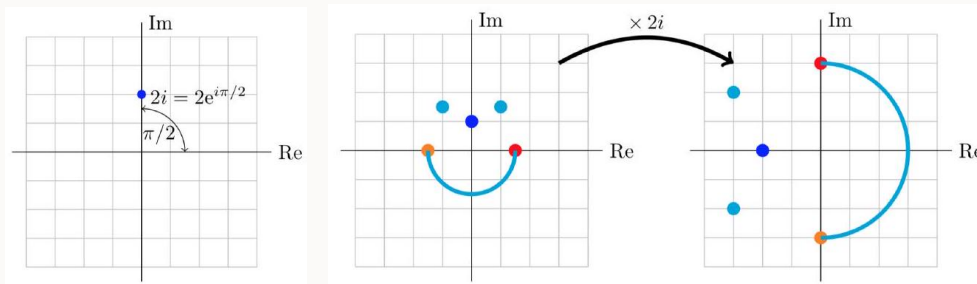
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \tag{1.27}$$

也就是说，两个复数相除时，它们的模相除，辐角相减。

例 1.6 (乘以 $2i$) 考虑一个简单但重要的例子。我们从几何直觉上知道，复数 $2i$ 具有模 $|2i| = 2$ 和辐角 $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ （主分支）。因此，它的极坐标形式为：

$$2i = 2e^{i\pi/2}. \tag{1.28}$$

这意味着乘以 $2i$ 的作用是将复数的模放大 2 倍，并使其辐角增加 $\pi/2$ ，即逆时针旋转 90° 。如下图所示：



例 1.7 (幂运算) 计算:

$$(1+i)^6 \quad \text{和} \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

解: 复数 $1+i$ 的模为:

$$|1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad \text{其中 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

因此:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

计算其幂:

$$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = 8e^{6i\pi/4} = 8e^{3i\pi/2} = -8i. \quad (1.29)$$

类似地, 已知:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3+i2\pi n}, \quad \text{其中 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

则:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{i\pi/3}\right)^3 = e^{i\pi} = -1. \quad (1.30)$$

1.5.3 复数化 (Complexification) 或复数替换 (Complex Replacement) 方法

在下一个例子中, 我们将演示复数化 (complexification) 或复数替换 (complex replacement) 技巧。这一技巧可用于简化三角函数积分, 在计算某些积分时会非常有用。

例 1.8 使用复数替换计算:

$$I = \int e^x \cos(2x) dx. \quad (1.31)$$

解: 我们利用欧拉公式:

$$e^{2ix} = \cos(2x) + i \sin(2x), \quad (1.32)$$

因此:

$$\cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{2ix}). \quad (1.33)$$

复数替换技巧的核心是将 $\cos(2x)$ 用 e^{2ix} 代替, 从而定义一个辅助积分:

$$I_c = \int e^x \cos(2x) + ie^x \sin(2x) dx. \quad (1.34)$$

我们有：

$$I = \operatorname{Re}(I_c). \quad (1.35)$$

计算 I_c 较为直接：

$$I_c = \int e^x e^{i2x} dx = \int e^{x(1+2i)} dx. \quad (1.36)$$

积分结果为（忽略常数项）：

$$I_c = \frac{e^{x(1+2i)}}{1+2i}. \quad (1.37)$$

直角坐标计算方法 我们可以将分母实数化：

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{e^{x(1+2i)}}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) (1-2i)}{5} \\ &= \frac{1}{5} e^x (\cos(2x) + 2 \sin(2x) + i(-2 \cos(2x) + \sin(2x))). \end{aligned} \quad (1.38)$$

因此，取实部：

$$I = \operatorname{Re}(I_c) = \frac{1}{5} e^x [\cos(2x) + 2 \sin(2x)]. \quad (1.39)$$

极坐标计算方法 在实际应用中，我们更倾向于使用极坐标表示，因为它更简洁，并且通常能更直观地给出结果。在极坐标中，我们写：

$$1+2i = r e^{i\phi}, \quad (1.40)$$

其中：

$$r = \sqrt{5}, \quad \phi = \arg(1+2i). \quad (1.41)$$

那么：

$$I_c = \frac{e^{x(1+2i)}}{\sqrt{5} e^{i\phi}} = \frac{e^x}{\sqrt{5}} e^{i(2x-\phi)} = \frac{e^x}{\sqrt{5}} (\cos(2x-\phi) + i \sin(2x-\phi)). \quad (1.42)$$

因此，取实部：

$$I = \operatorname{Re}(I_c) = \frac{e^x}{\sqrt{5}} \cos(2x-\phi). \quad (1.43)$$

1.5.4 N 次根 (Nth Roots)

我们需要能够求解复数的 N 次根，即解形如

$$z^N = c \quad (1.44)$$

的方程，其中 c 是已知复数。最方便的方法是将 c 和 z 表示为极坐标形式：

$$c = R e^{i\phi}, \quad z = r e^{i\theta}.$$

代入后，方程变为：

$$r^N e^{iN\theta} = R e^{i\phi}. \quad (1.45)$$

由于等式两边的复数必须相等，所以它们的模必须相等，并且它们的辐角只能相差 2π 的整数倍，因此：

$$r = R^{1/N}, \quad N\theta = \phi + 2\pi n, \quad \text{其中 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.46)$$

解得：

$$\theta = \frac{\phi}{N} + \frac{2\pi n}{N}. \quad (1.47)$$

例 1.9 求 2 的 5 次方根。

解： 设 $c = 2$ ，则 $R = 2$ 且 $\phi = 0$ 。因此，5 次方根为：

$$z_n = 2^{1/5} e^{2\pi i n/5}, \quad \text{其中 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.48)$$

注意，当 $n = 5$ 时，

$$2^{1/5} e^{2\pi i} = 2^{1/5} e^0,$$

它与 $n = 0$ 时的根相同。同理， $n = 6$ 对应 $n = 1$ 的根，依此类推。因此，总共有 5 个不同的根，对应于 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ：

$$z_n = 2^{1/5}, 2^{1/5} e^{i2\pi/5}, 2^{1/5} e^{i4\pi/5}, 2^{1/5} e^{i6\pi/5}, 2^{1/5} e^{i8\pi/5}. \quad (1.49)$$

一般情况 复数 $c = R e^{i\phi}$ 具有 N 个不同的 N 次根：

$$z_n = R^{1/N} e^{i(\phi/N + 2\pi n/N)}, \quad \text{其中 } n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.50)$$

例 1.10 求 1 的 4 次方根。

解： 需解方程 $z^4 = 1$ ，因此 $\phi = 0$ 。4 个不同的 4 次方根的极坐标形式为：

$$z_n = 1, e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{i3\pi/2}. \quad (1.51)$$

转换为直角坐标表示：

$$z_n = 1, i, -1, -i. \quad (1.52)$$

例 1.11 求 -1 的 3 次方根。

解： 由于

$$-1 = e^{i\pi + i2\pi n},$$

所以：

$$z_n = e^{i\pi/3 + i2\pi n/3}, \quad \text{其中 } n = 0, 1, 2. \quad (1.53)$$

因此 3 个三次方根分别是：

$$e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{i5\pi/3}. \quad (1.54)$$

转换为直角坐标：

$$e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1.55)$$

最终解为：

$$z_n = -1, \quad \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1.56)$$

例 1.12 求 $1+i$ 的 5 次方根。

解：由于：

$$z^5 = 1+i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)}. \quad (1.57)$$

其中 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ，因此 5 次方根为：

$$2^{1/10}e^{i\pi/20}, \quad 2^{1/10}e^{i9\pi/20}, \quad 2^{1/10}e^{i17\pi/20}, \quad 2^{1/10}e^{i25\pi/20}, \quad 2^{1/10}e^{i33\pi/20}. \quad (1.58)$$

例 1.13 验证我们的方法是否正确，求 4 的平方根。

解：需解方程：

$$z^2 = 4e^{i2\pi n}. \quad (1.59)$$

因此：

$$z_n = 2e^{i\pi n}, \quad n = 0, 1. \quad (1.60)$$

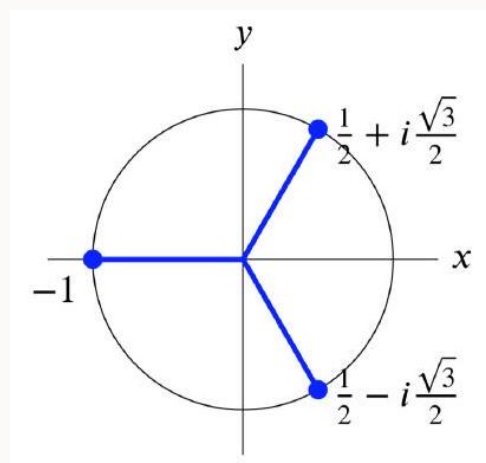
得到两个根：

$$z_0 = 2e^0 = 2, \quad z_1 = 2e^{i\pi} = -2. \quad (1.61)$$

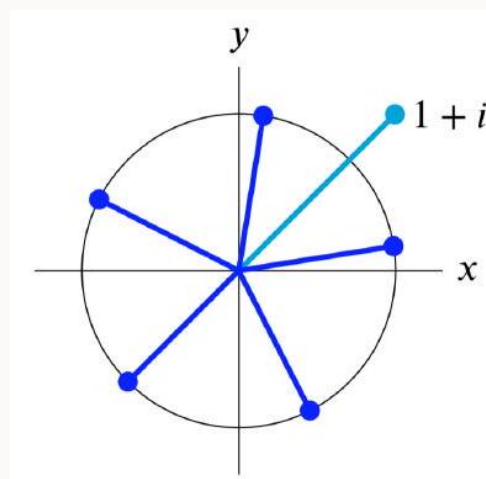
这与我们熟知的结果一致。

1.5.5 N 次根的几何意义

从上面的例子可以看出，所有的根均均匀分布在以原点为中心的圆上。例如， $1+i$ 的 5 次方根沿圆周等间隔排列，相距 $2\pi/5$ 弧度。



(a) -1 的三次方根 (Cube roots of -1)



(b) $1+i$ 的五次方根 (Fifth roots of $1+i$)

图 1: 不同复数的 N 次方根在复平面上的分布

1.6 复指数函数

欧拉公式表明：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \quad (1.62)$$

我们可以将其推广到复指数函数 e^z 的定义。

1.6.1 复指数函数的定义

对于复数 $z = x + iy$ ，复指数函数定义为：

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.63)$$

其中， e^x 是通常的实指数函数。

根据该定义，复指数函数满足所有通常的指数运算规则：

- $e^0 = 1$
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ (对任意正整数 n 成立)
- $(e^z)^{-1} = e^{-z}$
- 此外，指数函数还满足微分性质：

$$\frac{de^z}{dz} = e^z. \quad (1.64)$$

不过，在我们定义复数微分 $\frac{d}{dz}$ 之前，暂无法正式证明该性质。

- 单位复指数的模长

$$|e^{i\theta}| = 1. \quad (1.65)$$

证明： 由欧拉公式：

$$|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1. \quad (1.66)$$

- 一般复指数的模长

$$|e^{x+iy}| = e^x. \quad (1.67)$$

证明： 由定义：

$$|e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x. \quad (1.68)$$

- 复指数路径 e^{it} 在 $0 < t < \infty$ 时，在单位圆上逆时针无限次缠绕单位圆。如下图所示：

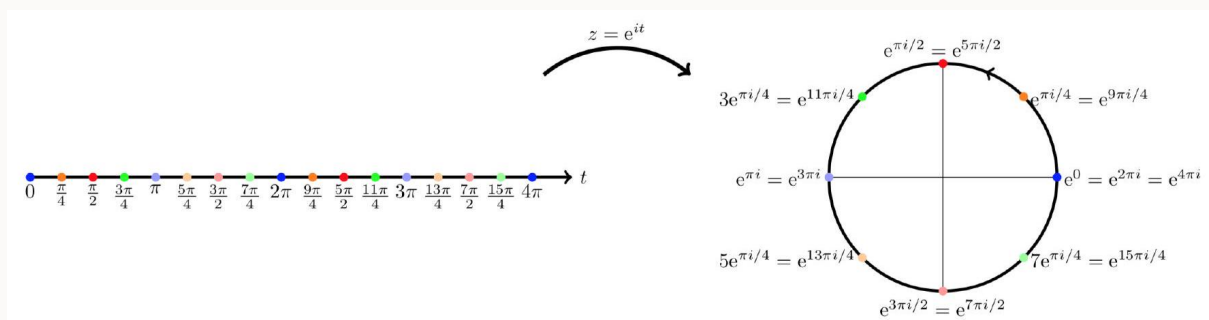


图 2: 映射 $t \rightarrow e^{it}$ 将实轴绕单位圆无限次缠绕。

1.7 复函数的映射表示

复函数 $w = f(z)$ 难以在图上直接绘制，因为它涉及 4 维空间（ z 平面 2 维， w 平面 2 维）。因此，我们将复函数视为映射，即将 z 平面上的点映射（mapping）到 w 平面上的点。

我们使用以下术语和符号来描述映射：

- 函数 $w = f(z)$ 也称为从 z 到 w 的映射。
- 我们可以用 $z \mapsto w$ 或 $z \mapsto f(z)$ 来表示映射，读作“ z 映射到 w （ z maps to w ）”。
- 可以说“ w 是 z 在映射下的像（image）”或简单地说“ w 是 z 的像”。
- 如果 z 平面上有一个点集，我们可以讨论该集合在映射下的像。例如，在映射 $z \mapsto iz$ 下，虚轴被映射为实轴。

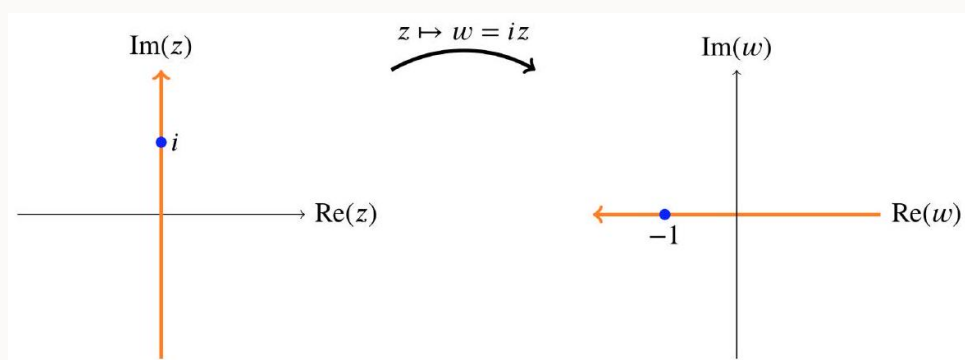


图 3: 映射 $z \mapsto iz$ 使得虚轴映射到实轴。

例 1.14 映射 $w = z^2$ ：研究映射 $w = z^2$ 的几何特性，我们将 z 平面（左）和 w 平面（右）进行对比，绘制不同的曲线及其对应的像。

- 射线映射

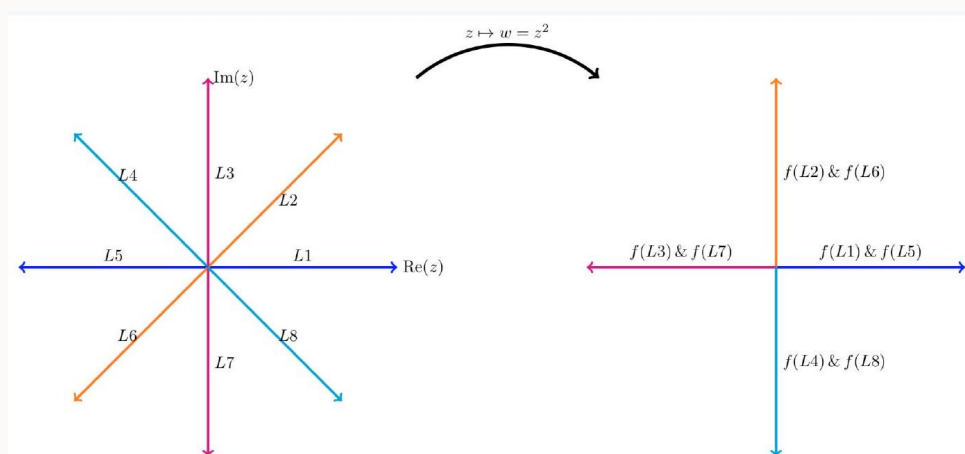


图 4: 函数 $f(z) = z^2$ 将射线映射为射线，并使角度翻倍。

- 通过 z^2 映射，从原点出发的射线仍然映射为射线。
- 例如，角度为 $\pi/4$ 的射线 L_2 映射到角度为 $\pi/2$ 的射线。

- 每对方向相反的射线映射到相同的方向，例如 L_2 和 L_6 。
 - 一般来说，角度为 θ 的射线会被映射到角度为 2θ 的射线。
- 垂直线映射为抛物线

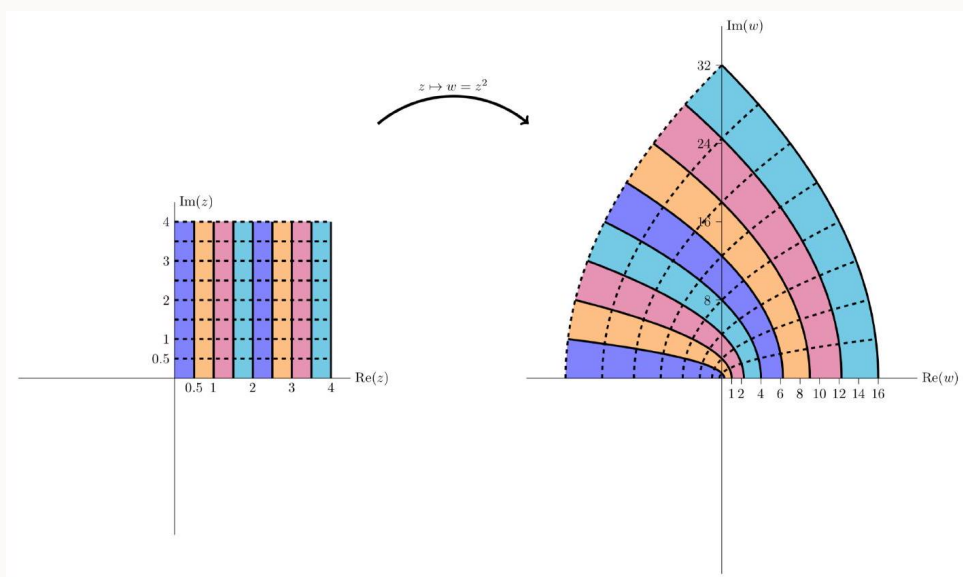


图 5: $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ 将垂直直线映射为开口向左的抛物线。

- 第一象限中的垂直条带映射为第一象限和第二象限中的抛物线条带。

解： 考虑复变函数映射

$$w = z^2 = (x + iy)^2. \quad (1.69)$$

展开后，得到

$$w = x^2 - y^2 + i2xy. \quad (1.70)$$

分别取实部和虚部：

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (1.71)$$

从虚部方程 $v = 2xy$ 得到

$$y = \frac{v}{2x}. \quad (1.72)$$

将其代入实部方程：

$$u = x^2 - \left(\frac{v}{2x}\right)^2. \quad (1.73)$$

整理：

$$u + \frac{v^2}{4x^2} = x^2. \quad (1.74)$$

两边乘以 $4x^2$ ：

$$v^2 = 4x^2(x^2 - u). \quad (1.75)$$

令 $x^2 = c$ ，其中 c 为固定参数（垂直线），则抛物线的方程变为：

$$u = \frac{v^2}{4c} + c. \quad (1.76)$$

这表明，对于每个固定的 c ，变换后的图像是一条向左开口的抛物线，这些抛物线的顶点在 $(u, v) = (c, 0)$ 处。

- 第一象限与第二象限映射

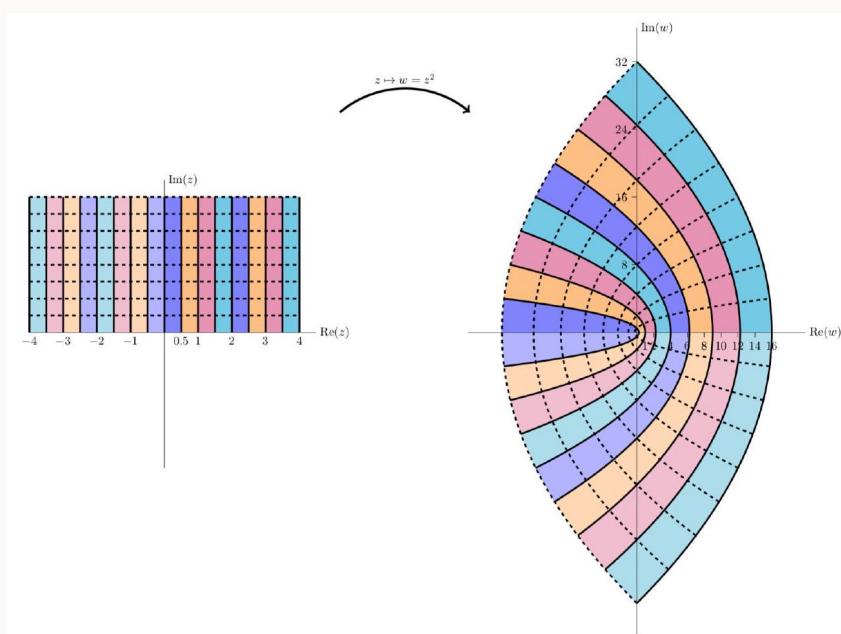


图 6: $f(z) = z^2$ 将第一象限和第二象限映射到整个复平面。

- 第一象限和第二象限的垂直条带被映射到整个复平面。
- 第一象限与第四象限的映射

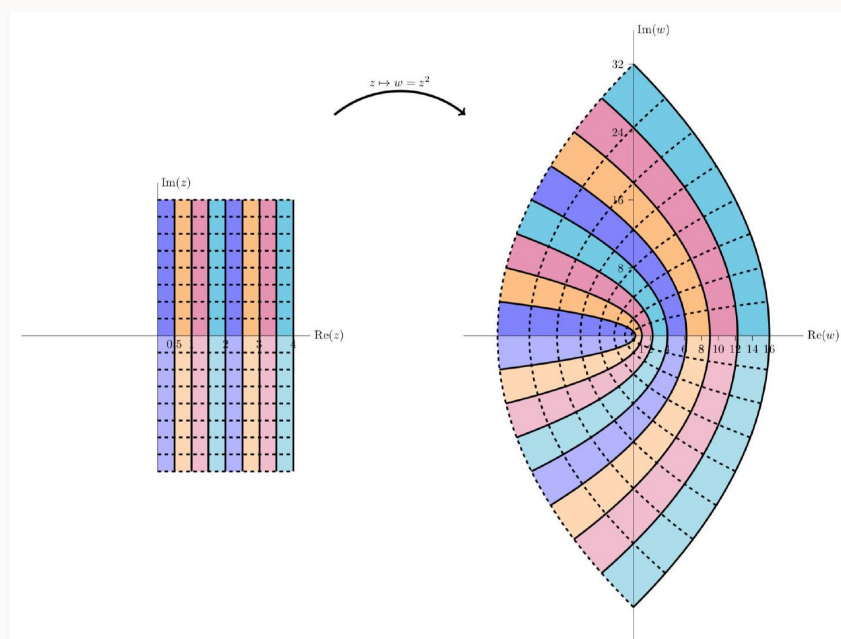


图 7: 第四象限的垂直条带映射与第二象限的映射完全相同。

- 第四象限的垂直条带，其映射与第二象限完全相同。
- 这是因为 $f(-z) = (-z)^2 = z^2$ ，即平方映射不会改变符号。

定义 1.3 (去心平面(Punctured Plane)) 不包含原点的复平面称为去心平面(punctured plane),

记作：

$$\mathbb{C} - \{0\} \quad \text{或} \quad \mathbb{C}/\{0\}.$$

例 1.15 映射 $w = e^z$ ：

- 指数函数如何映射直线？

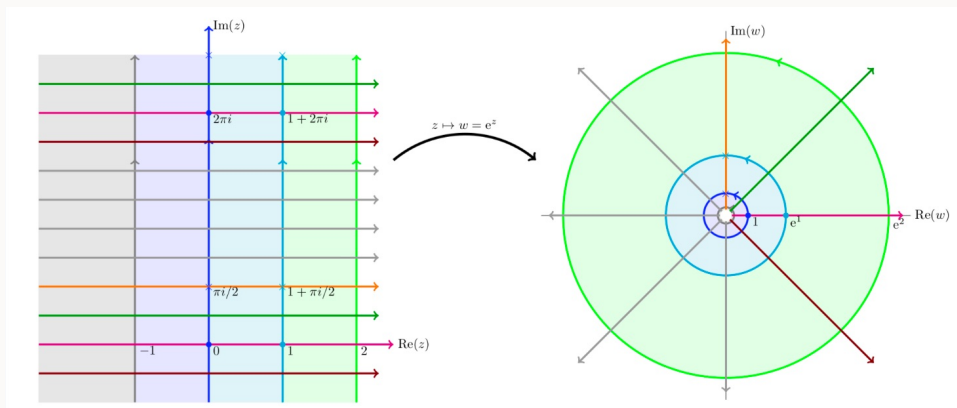


图 8: 指数函数 $w = e^z$ 的映射特性。

- 垂直直线：映射为以原点为中心的同心圆。
- 水平直线：映射为从原点出发的射线。
- 指数函数如何映射水平条带？

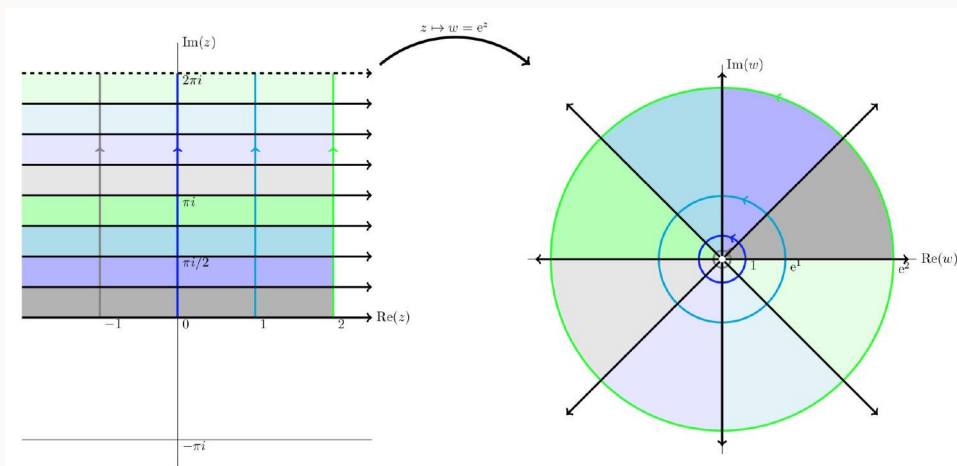


图 9: 水平条带 $0 \leq y < 2\pi$ 被指数函数映射为去心平面。

- 指数函数可以将水平条带映射为扇形区域。
- 任何宽度为 2π 的水平条带都会被映射为去心平面。

1.8 关于计算机软件 Mathematica 的使用

Mathematica 是主流的符号运算软件，该软件可以说几乎是理论物理研究中必备的软件，此外该软件也含盖了诸多数值运算功能。在本节中，我们将简要介绍如何使用 Mathematica 绘制复

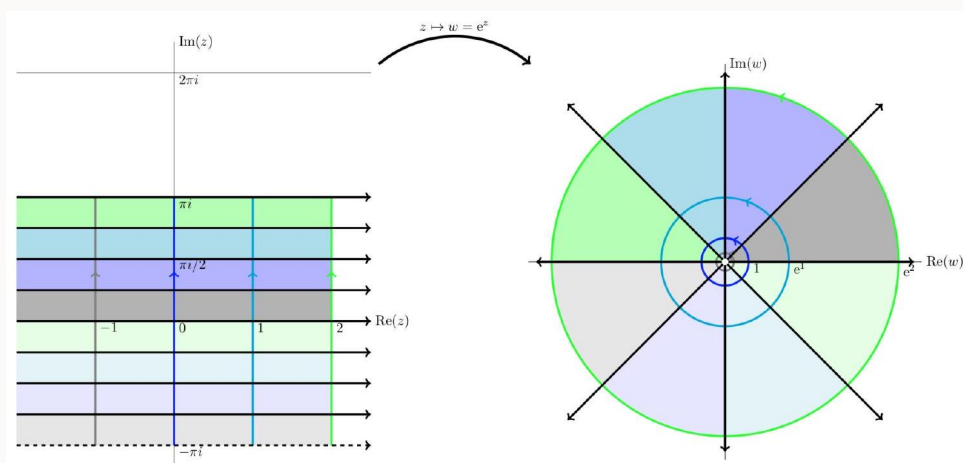


图 10: 水平条带 $-\pi < y \leq \pi$ 也被映射为去心平面。

变函数的映射图像。²

下面的 Mathematica 代码可以展示复变函数映射 $w = z^2$ 对网格线的变换，感兴趣的同学可以尝试不同类型的函数：

```
(* 定义颜色列表 *)
colors = {Blue, Orange, Pink, Cyan, Green, Purple};

(* 定义原始的垂直线 *)
gridLines = Table[
  {colors[[Mod[i, Length[colors]] + 1]],
   Line[{x, 0.5}, {x, 4}]}],
  {i, 1, 10}, {x, 0.5 + (i - 1)*0.5, 0.5 + (i - 1)*0.5}];

(* 变换函数 w = z^2 *)
transform[z_] := z^2;

(* 对垂直线进行变换，保持颜色一致 *)
transformedGridLines = Table[
  {colors[[Mod[i, Length[colors]] + 1]],
   Line[ReIm /@ Table[transform[x + I y], {y, 0.5, 4, 0.2}]]],
  {i, 1, 10}, {x, 0.5 + (i - 1)*0.5, 0.5 + (i - 1)*0.5}];

(* 绘制原始区域 *)
originalPlot = Graphics[gridLines, Axes -> True,
  AxesLabel -> {"Re(z)", "Im(z)"}, PlotLabel -> "原始区域"];

(* 绘制变换后的区域 *)
transformedPlot = Graphics[transformedGridLines, Axes -> True,
  AxesLabel -> {"Re(w)", "Im(w)"}, PlotLabel -> "映射后的区域"];
```

²其公司 Wolfram Research 还运营了一个包含各种标准数学函数的百科网站: functions.wolfram.com, 及各种数学资源百科网站: mathworld.wolfram.com, 同学们可以参考。

```
(* 并排显示原始区域和变换后的区域 *)
GraphicsRow[{originalPlot, transformedPlot}]
```

下面是 Mathematica 运行代码后生成的图像：

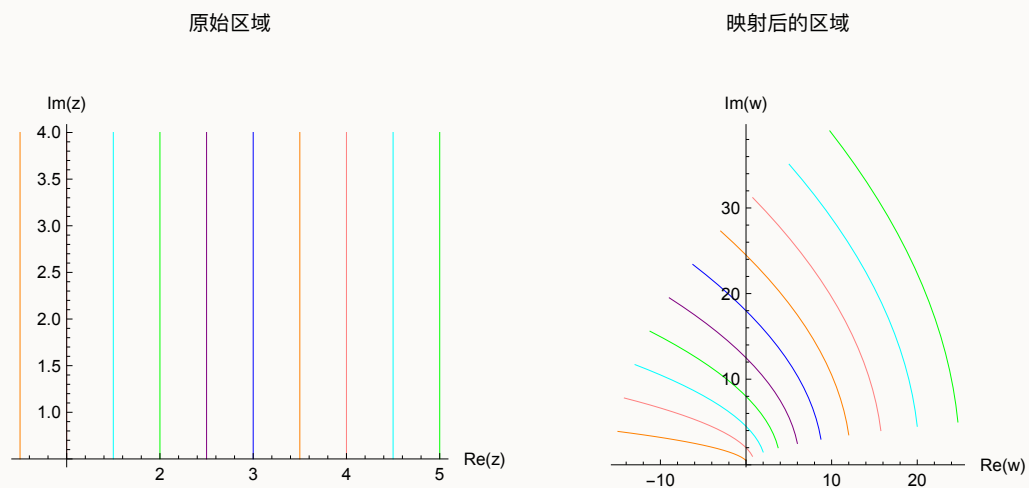


图 11: 复变函数映射 $w = z^2$ 对网格线的变换

1.9 辐角函数

1.9.1 多对一函数 (Many-to-One Functions)

函数 $f(z) = z^2$ 将 $\pm z$ 映射到相同的值。例如： $f(2) = f(-2) = 4$ 。我们称 $f(z)$ 是一个二对一 (2-to-1) 函数，即每个值对应 2 个不同的输入值。（严格来说，它只将一个点映射到 0，但我们暂且忽略这一点。）以下是其他多对一函数的示例：

例 1.16 三对一函数 $w = z^3$

函数 $w = z^3$ 是一个三对一函数。例如，三个不同的 z 值可以映射到相同的 $w = 1$ ：

$$1^3 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1.$$

例 1.17 指数函数 $w = e^z$ 的多重映射

函数 $w = e^z$ 将无穷多个不同的点映射为相同的值。例如：

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \dots = e^{2n\pi i} = \dots = 1, \\ e^{i\pi/2} &= e^{i\pi/2+2\pi i} = e^{i\pi/2+4\pi i} = \dots = e^{i\pi/2+2n\pi i} = \dots = i. \end{aligned}$$

一般而言，对于每个整数 n ，我们有：

$$e^{z+2n\pi i} = e^z.$$

1.9.2 辐角函数的分支 (Branches)

重要说明 这一节的内容非常重要， $\arg(z)$ 的分支是之前所有例子的核心概念。每个 z 具有无穷多个可能的辐角值，因此我们称 $\arg(z)$ 是一个多值函数 (multiple-valued function)。为了使 $\arg(z)$ 成为单值函数，我们需要选择一个特定的分支 (branch)。

定义 1.4 辐角函数的一个分支，指的是选择一个范围，使得 $\arg(z)$ 变成单值函数 (single-valued function)。指定一个分支意味着，我们只考虑落在该分支范围内的 $\arg(z)$ 值。

让我们来看几个不同的分支，以理解它们的工作方式：

- 取分支 $0 \leq \arg(z) < 2\pi$

在这个分支下， $\arg(z)$ 的值如下：

$$\arg(1) = 0, \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

该分支及其对应点在图12中表示。如果从正实轴上的 $z = 1$ 开始， $\arg(z) = 0$ ，然后 $\arg(z)$ 在逆时针方向增加，直到回到正实轴，此时 $\arg(z)$ 从接近 2π 跳回 0。这种不连续性是无法避免的。如果希望 $\arg(z)$ 连续，我们需要去除不连续点，即设定割线 (branch cut)。在图中，割线显示为粗橙色线。若做此切割，则 $\arg(z)$ 的定义域为去掉该割线的复平面。

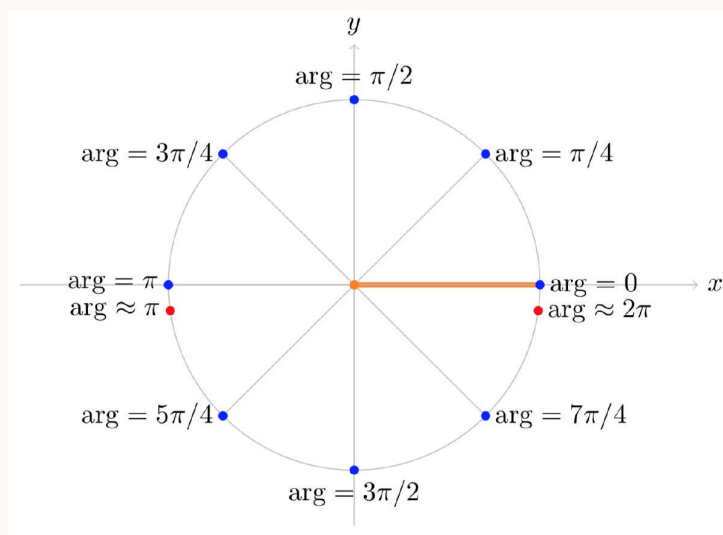


图 12: 分支 $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ 的 $\arg(z)$ 函数。

- 取分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$

在这个分支下, $\arg(z)$ 的值如下:

$$\arg(1) = 0, \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

该分支及其对应点在图13中显示。比较图12和图13:

- 在上半平面中, $\arg(z)$ 的值相同。
- 但在下半平面中, $\arg(z)$ 相差 2π 。

在该分支中, 割线位于负实轴上。当跨过割线时, $\arg(z)$ 从 π 瞬间跳变为接近 $-\pi$ 。

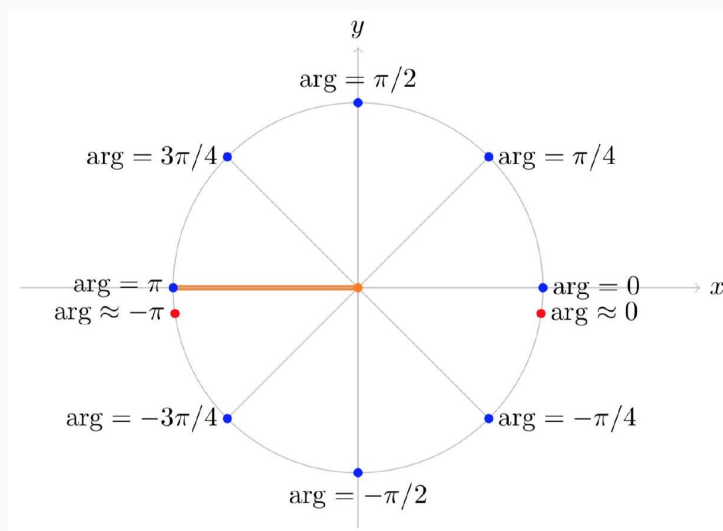


图 13: 分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 的 $\arg(z)$ 函数。

- 割线的多种可能性

割线不一定是一条直线, 任何从原点延伸到无穷远的曲线都可以作为割线。当 z 穿过割线时, $\arg(z)$ 发生 2π 的突变。

1.9.3 主分支 (Principal Branch of $\arg(z)$)

在上一节的多个分支中，分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 被单独挑选出来，并赋予一个特定的名称。

定义 1.5 (主分支) 分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 被称为主分支 (principal branch)。我们使用大写 $\text{Arg}(z)$ 来表示 $\arg(z)$ 的主分支。

1.10 分支与割线的简要总结

在前文中，我们讨论了 $\arg(z)$ 的分支与割线。在介绍 $\ln(z)$ 及其分支和割线之前，我们先对这些概念进行简要回顾。³

考虑函数 $w = f(z)$ ，其中 $z = x + iy$ 且 $w = u + iv$ 。

- **定义域 (Domain)**: f 的定义域是所有允许计算 $f(z)$ 的 z 值的集合。
- **值域 (Range)**: f 的值域（或称像）是函数在定义域内的所有 $f(z)$ 取值的集合，即 f 可到达的所有 w 组成的集合。
- **分支 (Branch)**: 对于一个多值函数，分支是对函数值域的选择，使得每个定义域内的元素仅对应一个可能的函数值。
- **割线 (Branch Cut)**: 割线是指从定义域中移除某些点，以去除函数的不连续点。

³建议在初步浏览本节内容后，继续阅读 $\ln(z)$ 章节，并在之后返回本节加深理解。

1.11 复对数函数

本节的目标是定义对数函数 $\ln(z)$ (或表示为 $\log(z)$)。我们希望 $\ln(z)$ 是指数函数 e^z 的逆函数, 即满足:

$$e^{\ln(z)} = z.$$

然而, 我们将看到 $\ln(z)$ 是多值函数 (multiple-valued function), 因此在使用时需要指定一个分支。

例 1.18 求 $\ln(1)$ 的所有可能值。

解: 我们知道:

$$e^0 = 1, \quad \Rightarrow \quad \ln(1) = 0.$$

同时, 指数函数满足:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad \Rightarrow \quad \ln(1) = 2\pi i.$$

事实上, $\ln(1)$ 可以取任何 $2\pi i$ 的整数倍:

$$\ln(1) = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

这个例子引导我们使用极坐标表示来定义 $\ln(z)$ 。若 $z = re^{i\theta}$, 则 $\ln(z)$ 取一个可能值为:

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln(re^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + i\theta. \end{aligned}$$

其中, $\ln(r)$ 是实数对数。

验证 $e^{\ln(z)} = z$ 根据上式, 我们验证:

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\ln(r) + i\theta} \\ &= e^{\ln(r)} e^{i\theta} \\ &= re^{i\theta} \\ &= z. \end{aligned}$$

定义 1.6 复对数函数 $\ln(z)$ 定义为:

$$\ln(z) \equiv \ln(|z|) + i \arg(z),$$

其中 $\ln(|z|)$ 是通常的正实数自然对数。

- 由于 $\arg(z)$ 具有无穷多个可能取值, 因此 $\ln(z)$ 也是多值函数。
- $\ln(0)$ 未定义, 因为 $\arg(0)$ 和 $\ln(|0|)$ 均未定义。
- 选择 $\arg(z)$ 的某个特定分支, 可以使 $\ln(z)$ 成为单值函数。在这种情况下, 我们称之为“对数函数的一个分支”。

• 主分支:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z), \quad \text{其中} \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi.$$

例 1.19 计算 $\ln(i)$ 的所有可能值, 并找出主分支上的值。

解: 已知

$$|i| = 1, \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

因此

$$\begin{aligned} \ln(i) &= \ln(1) + i\frac{\pi}{2} + i2n\pi \\ &= i\frac{\pi}{2} + i2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

主分支要求 $\arg(z)$ 取值范围为 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, 因此:

$$\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}.$$

所以, 主分支上的 $\ln(i)$ 为:

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2}.$$

例 1.20 计算 $\ln(-1 - \sqrt{3}i)$ 的所有可能值, 并找出主分支上的值。

解: 令 $z = -1 - \sqrt{3}i$, 则:

$$|z| = 2, \quad \arg(z) = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

因此:

$$\ln(z) = \ln(2) - i\frac{2\pi}{3} + i2n\pi.$$

主分支上的值为:

$$\ln(z) = \ln(2) - i\frac{2\pi}{3}.$$

1.11.1 映射 $w = \ln(z)$ 的图示

在图 14 中，我们看到一个点 z 被映射到（无限多个）不同的 w 值。图中展示了 $\ln(1)$ （蓝色点）、 $\ln(4)$ （红色点）、 $\ln(i)$ （蓝色叉号）、 $\ln(4i)$ （红色叉号）。主分支内的值位于 w -平面中的阴影区域。注意，对于给定的 z ， $\ln(z)$ 的不同取值在 w -平面上以 $2\pi i$ 为间隔排列。

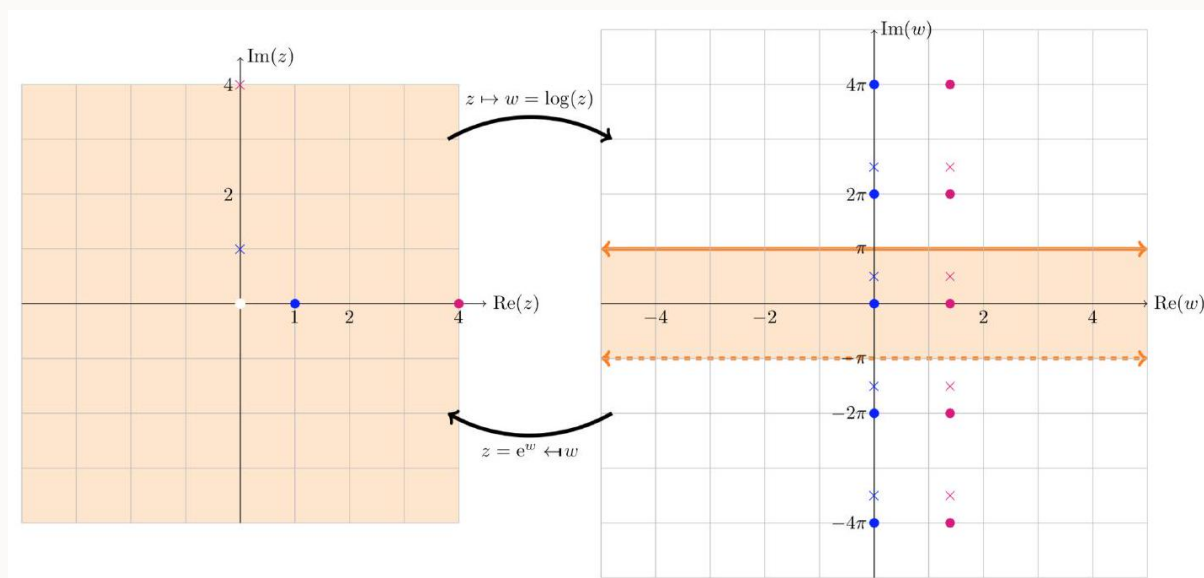


图 14: 映射 $\ln(z) : \ln(1), \ln(4), \ln(i), \ln(4i)$

图 15 说明了主分支如何将去心平面映射到水平方向的条带 $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ 。我们再次展示 $\ln(1), \ln(4), \ln(i), \ln(4i)$ 的值。由于我们已选择了一个分支，因此每个对数值仅显示一个取值。

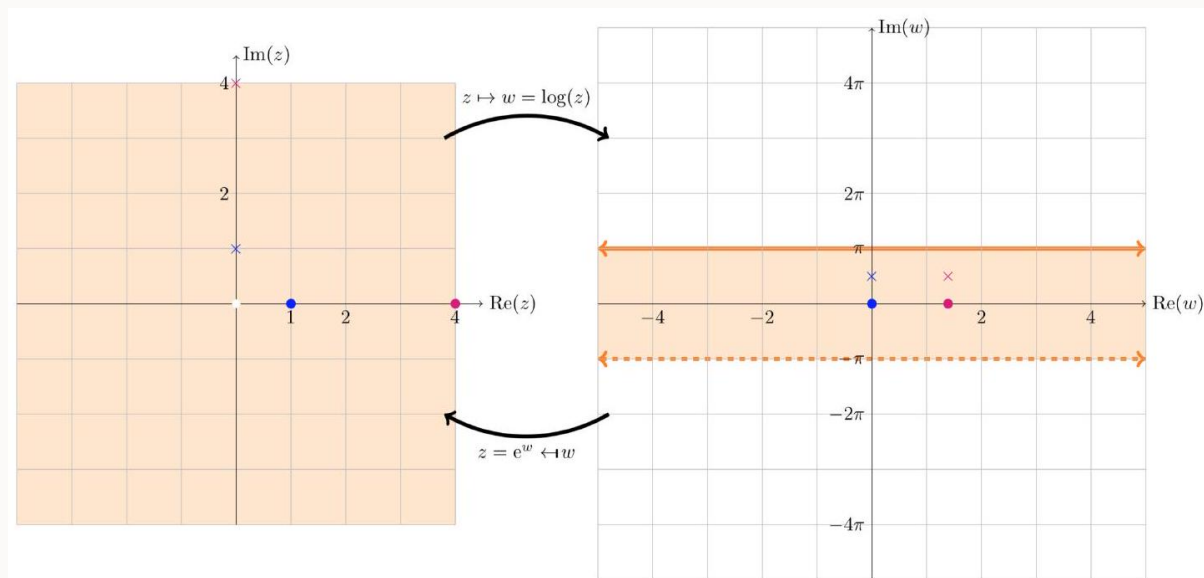


图 15: 映射 $\ln(z)$: 主分支与去心平面

图 16 展示了：

- 以原点为中心的圆在映射后变为竖直直线；
- 从原点出发的射线在映射后变为水平直线。

如果我们限制在主分支内：

- 圆被映射为竖直线段；
- 射线被映射到 w -平面主分支（阴影区域）中的单一水平线。

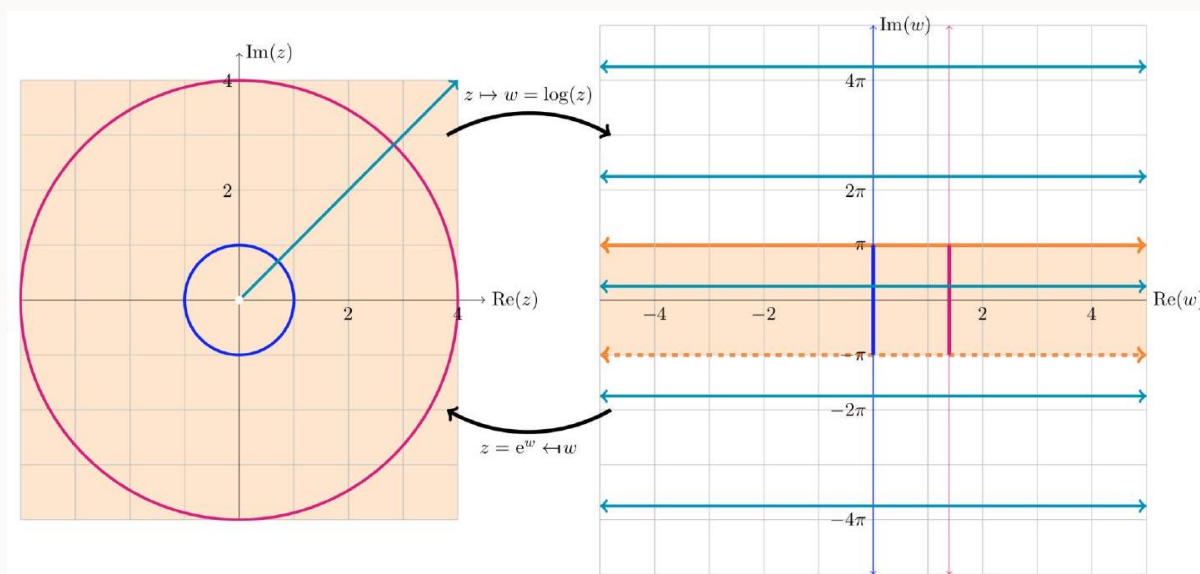


图 16: 映射 $\ln(z)$: 圆与射线的映射

1.11.2 复数幂

我们可以使用对数函数定义复数幂（Complex Powers）。

定义 1.7 (复数幂) 设 z 和 a 为复数，则 z^a 定义为：

$$z^a = e^{a \ln(z)} \quad (1.77)$$

由于 $\ln(z)$ 通常是多值函数，因此要指定一个唯一的值，需要选择 $\ln(z)$ 的某个分支。

例 1.21 计算所有 $\sqrt{2i}$ 的值，并给出主分支 $\ln(z)$ 对应的值。

解： 我们有

$$\ln(2i) = \ln\left(2e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \ln(2) + i\frac{\pi}{2} + i2n\pi \quad (1.78)$$

因此：

$$\begin{aligned} \sqrt{2i} &= (2i)^{1/2} \\ &= e^{\frac{\ln(2i)}{2}} \\ &= e^{\frac{\ln(2)}{2} + \frac{i\pi}{4} + in\pi} \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4} + in\pi} \end{aligned} \quad (1.79)$$

(其中 n 为整数。) 如前所见, 该表达式只给出两个不同的值。由于主分支的 $\text{Arg}(2i) = \pi/2$, 因此:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}i &= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2})} \\ &= \sqrt{2}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \\ &= 1+i\end{aligned}\tag{1.80}$$

另一个不同的值取 $n = 1$, 其值为上述结果的相反数。

例 1.22 计算所有 i 的三次方根, 并给出主分支对应的值。

解: 由已知

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2} + i2n\pi, \quad \text{其中 } n \text{ 为整数。}\tag{1.81}$$

因此

$$i^{1/3} = e^{\frac{\ln(i)}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2n\pi}{3}}\tag{1.82}$$

这给出了三个不同的值:

$$e^{i\pi/6}, \quad e^{i5\pi/6}, \quad e^{i9\pi/6}\tag{1.83}$$

其中, 主分支对应的值取 $\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$, 因此:

$$i^{1/3} = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\tag{1.84}$$

例 1.23 计算所有 1^i 的值, 并确定主分支对应的值。

解: 该问题与前面的计算类似。由于:

$$\ln(1) = 2n\pi i\tag{1.85}$$

所以:

$$1^i = e^{i\ln(1)} = e^{i2n\pi i} = e^{-2n\pi}\tag{1.86}$$

其中 n 为整数。由于主分支取 $\ln(1) = 0$, 所以:

$$1^i = 1\tag{1.87}$$

1.12 逆欧拉公式

欧拉公式 (Euler's formula) 提供了复指数函数与三角函数之间的关系。我们可以对其进行变换, 以得到逆欧拉公式 (Inverse Euler Formula)。

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad (1.88)$$

以及

$$e^{-it} = \cos(t) - i \sin(t) \quad (1.89)$$

通过加法与减法运算, 我们可以得到:

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad (1.90)$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (1.91)$$

1.13 莫瓦尔公式

对于正整数 n , 莫瓦尔公式 (De Moivre's Formula) 如下:⁴

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.92)$$

证明: 该公式可以直接由欧拉公式推导得到:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.93)$$

⁴历史上, 莫瓦尔在欧拉公式被发现之前就已经提出了这个公式, 因此该公式以他的名字命名。

1.14 复数乘法的矩阵表示

考虑两个复数 $z_1 = a + bi$ 和 $z_2 = c + di$ ，它们的乘积如下：

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad) := \omega \quad (1.94)$$

现在我们定义两个矩阵：

$$Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

注意，这些矩阵存储了与复数 z_1 和 z_2 相同的信息。接下来，我们计算它们的矩阵乘积：

$$Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{bmatrix} := W \quad (1.96)$$

比较矩阵 W 和复数乘积的结果 ω ，我们发现：

W 实际上是 $z_1 z_2$ 对应的矩阵。

因此，我们可以将任意复数 z 以矩阵的形式表示为：

$$Z = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

在这种表示下，复数乘法变成了矩阵乘法。

此外，我们还可以将复数矩阵分解如下：

$$Z = \operatorname{Re}(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{Im}(z) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.98)$$

其中，虚数单位 i 对应于矩阵：

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

并且 $i^2 = -1$ 变为矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

1.14.1 极坐标形式的矩阵分解

在极坐标表示中，我们有：

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.101)$$

相应的矩阵表示为：

$$Z = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

进一步分解为：

$$Z = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

这表明，复数的乘法可以看作是伸缩因子 r 与二维旋转矩阵的乘积。特别地，乘以 i 等价于一个角度为 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 且模长 $r = 1$ 的旋转变换。⁵

⁵尽管我们不会经常使用复数的矩阵表示，但在某些情况下，这种表示可以帮助我们记忆特定的公式和数学性质。

2 解析函数

2.1 导数初步

在微积分中，我们通过极限定义导数（derivative）。在复分析中，我们也采用相同的定义：

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (2.1)$$

在正式讨论导数之前，我们需要先探索并理解极限的概念。为此，我们先来看两个简单的例子——一个是正面的，一个是负面的。

例 2.1 求函数 $f(z) = z^2$ 的导数。

解： 利用导数的极限定义进行计算：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}. \quad (2.2)$$

化简后得到：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \quad (2.3)$$

因此， $f'(z) = 2z$ 。

这是一个正面的例子，表明复变函数的导数可以像实数情况一样计算。接下来，我们来看一个负面的例子，展示为何需要深入理解极限。

例 2.2 令 $f(z) = \bar{z}$ 。说明该函数在 $z = 0$ 处的导数极限不存在。

解： 尝试计算 $f'(0)$ ：

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}. \quad (2.4)$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ，则：

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (2.5)$$

现在，考虑 Δz 以不同方式趋于零：

- 若沿着 x 轴趋于零，即 $\Delta y = 0$ ，则：

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \quad (2.6)$$

- 若沿着 y 轴趋于零，即 $\Delta x = 0$ ，则：

$$f'(0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1. \quad (2.7)$$

由于不同方向的极限值不同，我们得出结论：该极限不存在。因此， $f(z) = \bar{z}$ 在 $z = 0$ 处不可导。

这个例子说明，复变函数的极限依赖于路径，只有当所有路径的极限值一致时，该极限才存在。因此，我们需要更深入地理解复分析中的极限概念。接下来，我们将探讨极限的性质。

2.2 开圆盘、去心开圆盘与开区域

定义 2.1 (开圆盘 (Open Disk)) 开圆盘指以 z_0 为中心、半径为 r 的所有满足 $|z - z_0| < r$ 的点的集合，即所有到 z_0 的距离小于 r 的点。

定义 2.2 (去心开圆盘 (Open Deleted Disk, Open Punctured Disk)) 去心开圆盘指在开圆盘的基础上去掉中心点 z_0 ，即所有满足 $0 < |z - z_0| < r$ 的点的集合。

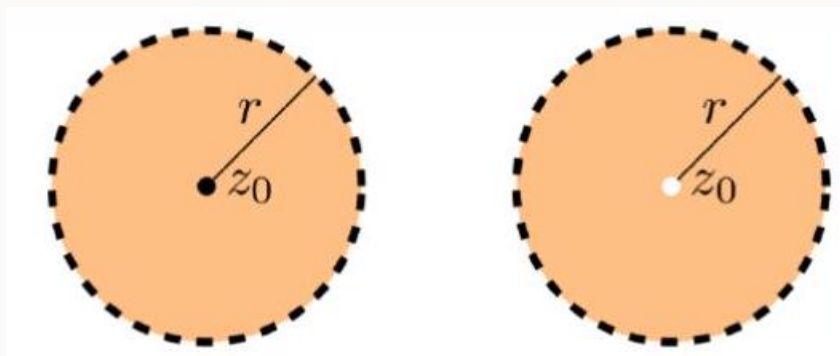


图 17: 左图：以 z_0 为中心的开圆盘；右图：以 z_0 为中心的去心开圆盘。

定义 2.3 (开区域 (Open Region)) 开区域是指复平面中一个集合 A ，如果对于集合中的任意一点，该点都可以被完全包含在集合 A 内的某个开圆盘中，则称 A 为开区域。我们通常省略“开”字，而直接称其为区域。

在图 18 中，左侧的集合 A 是一个开区域，因为对于 A 内的任意一点，我们都可以找到一个小圆盘，使其完全包含在 A 内。（虚线边界表示该边界不属于集合 A 。）

相比之下，右侧的集合 B 不是一个开区域。请注意，图中标出的点 z 在边界上，因此它的任意小圆盘都会包含 B 之外的点。

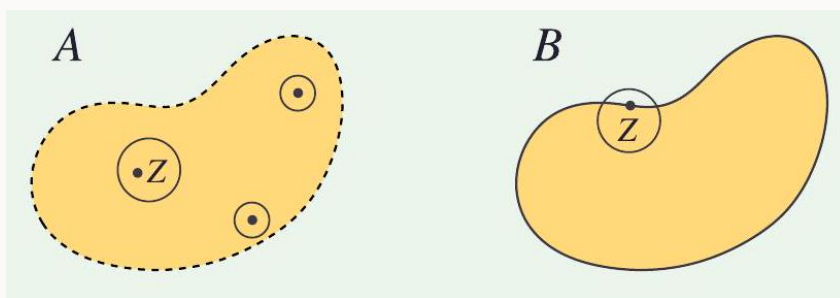


图 18: 左图：开区域 A ；右图： B 不是开区域。

2.3 极限与连续函数

2.3.1 极限的定义

定义 2.4 (极限 (Limit)) 若 $f(z)$ 在 z_0 附近的去心圆盘内有定义, 则称

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (2.8)$$

当且仅当无论 z 以何种方向趋近于 z_0 , 函数值 $f(z)$ 都收敛于 w_0 。

图 19 展示了多个收敛于 z_0 的点列。如果极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ 存在, 则 $f(z)$ 必须沿着所有这些点列趋向于 w_0 。

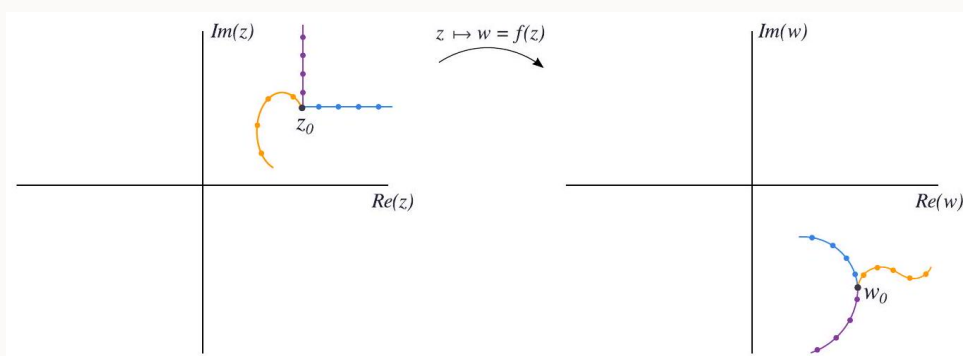


图 19: 收敛到 z_0 的点列被映射为收敛到 w_0 的点列。

例 2.3 许多函数的极限是显然的。例如:

$$\lim_{z \rightarrow 2} z^2 = 4 \quad (2.9)$$

以及

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 2}{z^3 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \quad (2.10)$$

例 2.4 (极限不存在) 证明:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x + iy}{x - iy} \quad (2.11)$$

不存在。

解: 在实轴上, 我们有:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x}{x} = 1. \quad (2.12)$$

因此, 当 z 沿着实轴趋于 0 时, 极限为 1。

另一方面, 在虚轴上, 我们有:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{iy}{-iy} = -1. \quad (2.13)$$

因此, 当 z 沿着虚轴趋于 0 时, 极限为 -1。

由于不同路径的极限不一致，因此

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} \quad (2.14)$$

不存在！

2.3.2 极限的性质

极限满足通常的性质。假设

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2 \quad (2.15)$$

则有⁶：

- 加法：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2 \quad (2.16)$$

- 乘法：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = w_1 \cdot w_2 \quad (2.17)$$

- 除法（若 $w_2 \neq 0$ ）：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2} \quad (2.18)$$

- 复合函数极限（若 $h(z)$ 在 w_1 的邻域内连续）：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = h(w_1) \quad (2.19)$$

我们可以用实部和虚部的函数来重新表述极限的定义。为此，我们将

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.20)$$

并记

$$P = (x, y), \quad P_0 = (x_0, y_0), \quad w_0 = u_0 + iv_0 \quad (2.21)$$

则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{iff} \quad \begin{cases} \lim_{P \rightarrow P_0} u(x, y) = u_0, \\ \lim_{P \rightarrow P_0} v(x, y) = v_0. \end{cases} \quad (2.22)$$

注：“iff”代表“if and only if”，即“当且仅当”，表示两者等价。

2.3.3 连续函数

一个函数是连续的，当且仅当它没有突变。这一想法可以通过以下定义正式表述。

⁶我们不在这里给出这些性质的证明，你可以尝试使用极限定义来证明它们。

定义 2.5 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个开圆盘内有定义，并且满足

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad (2.23)$$

则称 f 在 z_0 处连续。如果 f 在某个开区域 A 上定义，并且在 A 内的所有点都连续，则称 f 在 A 上连续。

同样，我们可以将这一概念用 (x, y) 的形式重新表述：复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在某点连续，当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 作为二元实函数都是连续的。

例 2.5 一些常见的连续函数：

1. 多项式函数：

设 $P(z)$ 是一个多项式：

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n. \quad (2.24)$$

该函数在整个复平面上连续。原因：每个幂次项 $(x + iy)^k$ 都是 (x, y) 的连续函数，因此其线性组合也是连续的。

2. 指数函数：

复指数函数在整个复平面上连续。因为：

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y), \quad (2.25)$$

其中实部 $e^x \cos(y)$ 和虚部 $e^x \sin(y)$ 都是 (x, y) 的连续函数，因此 e^z 也是连续的。

3. 主分支辐角函数 $\text{Arg}(z)$ ：

函数 $\text{Arg}(z)$ 在复平面去掉非正实轴后是连续的。原因：这一点是显然的，也是我们为 $\arg$ 定义割线的原因。我们必须去除负实轴，因为当跨越负实轴时， $\text{Arg}(z)$ 会发生 2π 的跳跃。此外，我们还需要去除 $z = 0$ ，因为 $\text{Arg}(z)$ 在 $z = 0$ 处甚至没有定义。

4. 主分支对数函数 $\ln(z)$ ：

函数 $\ln(z)$ 在复平面去掉非正实轴后是连续的。因为主分支的对数函数定义为：

$$\ln(z) = \ln(r) + i \text{Arg}(z), \quad (2.26)$$

其中 $\ln(r)$ 在 $r > 0$ 时是连续的，而 $\text{Arg}(z)$ 在去除非正实轴后连续，因此 $\ln(z)$ 也是连续的。

2.3.4 连续函数的性质

由于连续性是通过极限定义的，因此我们有以下关于连续函数的重要性质。

定理 2.1 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 A 上连续，则：

- $f(z) + g(z)$ 在 A 上连续。
- $f(z)g(z)$ 在 A 上连续。

- 若 $g(z) \neq 0$, 则 $f(z)/g(z)$ 在 A 上连续。
- 若 h 在 $f(A)$ 上连续, 则 $h(f(z))$ 在 A 上连续。

利用这些性质, 我们可以推导出以下函数的连续性:

- 指数函数 e^{z^2} 在整个复平面上连续。
- 余弦函数的复数形式 $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 在整个复平面上连续。
- 若 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是多项式, 则 $P(z)/Q(z)$ 在 $Q(z) \neq 0$ 的点上连续。

2.4 无穷远点

通过定义，扩展复平面 (extended complex plane) 记作 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ，即在复平面上额外添加一个无穷远点 (point at infinity)，其概念由极限的方式来描述。

定义 2.6 设 $\{z_n\}$ 为复数列，若 $|z_n| \rightarrow \infty$ ，则称该序列趋于无穷远点，即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty. \quad (2.27)$$

无穷远点可以从任何方向逼近，如图 20 所示，所有展示的序列均朝向无穷远点增长，即无穷远点的模大于任何正数，辐角不定。

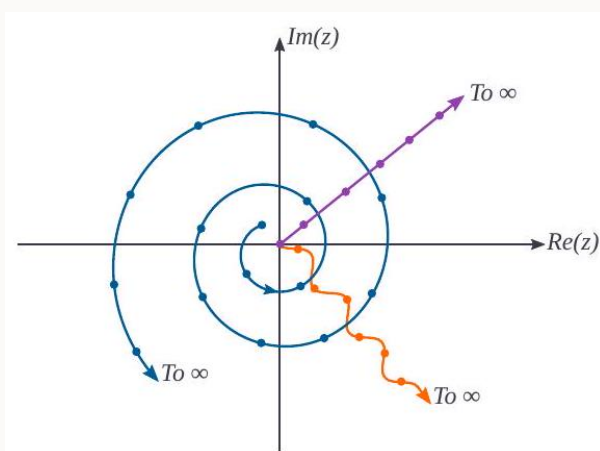


图 20: 不同的数列都趋于无穷远点。

定义 2.7 若在复平面中取以原点为中心、半径为 R 的大圆，则该圆外的区域称为无穷远点的邻域 (neighborhood of infinity)。

在图 21 中，阴影部分代表无穷远点的邻域，即半径 R 之外的区域。

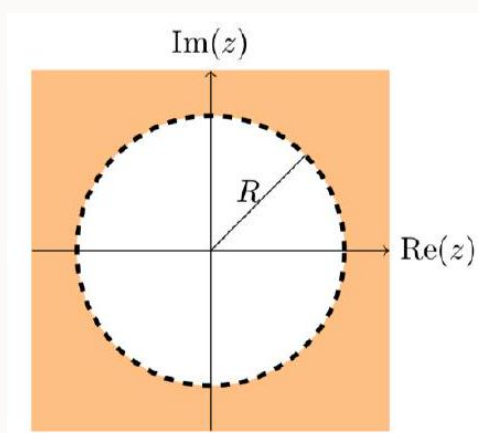


图 21: 橙色阴影区域表示无穷远点的邻域，即半径为 R 的大圆外的区域。

2.4.1 无穷远处的极限

核心理想是 $\frac{1}{\infty} = 0$ ，即：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0. \quad (2.28)$$

由此，我们得到以下结论：

- 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ，则等价于

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0. \quad (2.29)$$

- 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ ，则等价于

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = w_0. \quad (2.30)$$

- 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ，则等价于

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0. \quad (2.31)$$

例 2.6 计算 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 。

解： 该极限不存在，因为当 z 沿不同方向趋向无穷远时，函数值不同。由 $e^z = e^x e^{iy}$ 可得：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x e^{iy} = 0, \quad (2.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x e^{iy} = \infty. \quad (2.33)$$

而当 $y \rightarrow \infty$ 且 x 为常数时， $e^x e^{iy}$ 在围绕原点的圆上不断旋转，因此极限不存在。

例 2.7 证明 $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n = \infty$ ，其中 n 为正整数。

证明： 需证明当 $|z|$ 趋于无穷大时， $|z^n|$ 亦趋于无穷大。令 $z = Re^{i\theta}$ ，则

$$|z^n| = |R^n e^{in\theta}| = R^n = |z|^n. \quad (2.34)$$

由于 $|z| \rightarrow \infty$ ，显然 $|z|^n \rightarrow \infty$ ，故证毕。

2.4.2 球面到复平面的立体投影

为了直观地理解无穷远点 ∞ ，我们可以使用黎曼球面（Riemann Sphere）及其相关的立体投影（stereographic projection）。图 22 展示了一个球面，其赤道与复平面的单位圆重合。

立体投影的方式如下：从球面北极点 N 处作切割（secant）线，穿过球面上的点 P ，观察该切割线与复平面 z 的交点。这构成了球面上的点 P 与复平面中的点 z 之间的一一对应关系。立体投影的数学表达式如下：

$$P = (a, b, c) \mapsto z = \frac{a}{1-c} + i \frac{b}{1-c}. \quad (2.35)$$

其中：

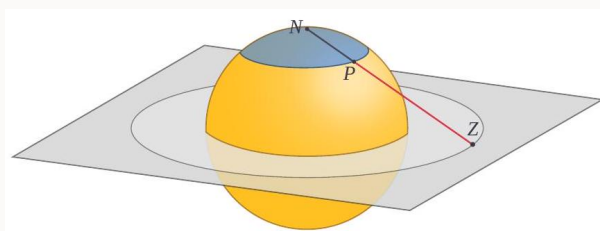


图 22: 从球面到复平面的立体投影。

- (a, b, c) 是球面上的点；
- z 是复平面上的对应点。

值得注意的是，北极点 $N = (0, 0, 1)$ 具有特殊性质。当割线从 N 出发时，它在 N 处变为切 (tangent) 线，因此永远不会与复平面相交。因此，我们认为 N 对应于无穷远点 ∞ 。

在图 22 中，复平面上的大圆外部区域（邻域）对应于球面上的北极点附近的小圆帽区域，即该区域是球面上无穷远点的邻域。

另一种常见的立体投影方式如图 23 所示。在该图中，球面放置在南极位于原点的位置，但仍然使用从北极点发出的割线进行投影。

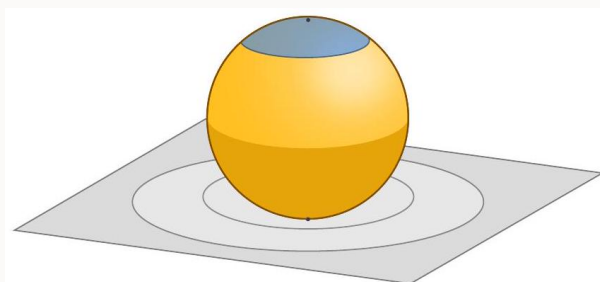


图 23: 另一种立体投影方式：球面南极位于原点。

2.5 复函数的导数与解析函数

复函数的导数定义类似于实函数的导数定义。对于函数 $f(z)$ ，其在 z_0 处的导数定义为：

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.36)$$

如果极限存在，我们称 f 在 z_0 处是**解析的** (analytic)，或者说 f 在 z_0 处是可微的 (differentiable)。

注意：这个极限必须在任意方向上趋近 z_0 时都存在，且值相同！

如果 f 在某个开区域 A 的所有点都可微，我们称 f 在 A 上解析或全纯 (holomorphic)⁷。与实数导数一样，复数导数也有多种记号。若 $w = f(z)$ ，则可以写作：

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (2.37)$$

2.5.1 导数法则

如果我们每次都通过极限计算导数，那将是一件非常繁琐的事情。幸运的是，复变函数的导数公式与实变函数相同。假设 f 和 g 可导，则有以下公式：

- **和法则 (Sum Rule)：**

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z) \quad (2.38)$$

- **积法则 (Product Rule)：**

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad (2.39)$$

- **商法则 (Quotient Rule)：**

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (2.40)$$

- **链式法则 (Chain Rule)：**

$$\frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z))f'(z) \quad (2.41)$$

- **反函数法则 (Inverse Rule)：**

$$\frac{df^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad (2.42)$$

为了给出这些公式的直观证明，我们来证明积法则：

⁷许多数学家更倾向于使用“全纯函数”这一术语，而不是“解析函数”；然而，“解析”一词在物理学家、工程师以及一些较早的文献中被广泛使用。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))g(z) + f(z_0)(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.6 柯西-黎曼方程

柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程是复变函数可导的一个重要结果, 它来源于复导数的极限值必须在任意方向上保持一致的要求。柯西-黎曼方程是我们分析复变函数的重要工具之一。

2.6.1 偏导数的极限定义

在介绍柯西-黎曼方程之前, 我们先回顾偏导数的定义。如果 $u(x, y)$ 是一个二元函数, 则其偏导数定义如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \quad (2.44)$$

即在 y 保持不变的情况下计算 u 关于 x 的变化率。

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \quad (2.45)$$

即在 x 保持不变的情况下计算 u 关于 y 的变化率。

2.6.2 柯西-黎曼方程

柯西-黎曼方程利用 u 和 v 的偏导数, 使我们能够检验 $f(z)$ 是否具有复导数, 并计算该导数。

定理 2.2 (柯西-黎曼方程) 若复函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在某一区域内解析 (即复可微), 则有

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.46)$$

特别地, 满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.47)$$

这组偏微分方程即通常所称的柯西-黎曼方程。我们也可以将其写为简化形式:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2.48)$$

证明: 假设 $f(z)$ 在某区域 A 内可微, 并且

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.49)$$

我们分别从水平方向和竖直方向计算 $f'(z)$ 。

水平方向计算 ($\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$)

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

竖直方向计算 ($\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$)

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

由于 $f'(z)$ 在不同方向上的极限值必须相等, 我们得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.52}$$

这即为柯西-黎曼方程。

定理 2.3 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 A 内定义。若 u 和 v 满足柯西-黎曼方程, 并且偏导数连续, 则 $f(z)$ 在 A 内可微。

2.6.3 柯西-黎曼方程的应用

柯西-黎曼方程为我们提供了一种直接检验函数是否可微并计算其导数的方法。

例 2.8 使用柯西-黎曼方程证明 e^z 可微, 并计算其导数。

解: 设

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y. \tag{2.53}$$

因此,

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y. \tag{2.54}$$

计算偏导数:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \tag{2.55}$$

$$v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y. \tag{2.56}$$

显然, $u_x = v_y$ 且 $u_y = -v_x$, 因此柯西-黎曼方程成立, 故 e^z 可微, 并且其导数为:

$$\frac{d}{dz} e^z = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \tag{2.57}$$

例 2.9 使用柯西-黎曼方程证明 $f(z) = \bar{z}$ 不可微。

解: 设 $f(x + iy) = x - iy$, 则

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y. \tag{2.58}$$

计算偏导数:

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = -1. \tag{2.59}$$

由于 $u_x \neq v_y$, 柯西-黎曼方程不成立, 因此 f 不可微。

定理 2.4 若 $f(z)$ 在某个开圆盘内可微, 并且 $f'(z) = 0$ 恒成立, 则 $f(z)$ 为常数。

证明: 由于 $f(z)$ 可微, 并且 $f'(z) \equiv 0$, 由柯西-黎曼方程可得:

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) = v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0. \quad (2.60)$$

由多元微积分可知, 若一个二元函数的所有偏导数恒为零, 则该函数必为常数。因此, u 和 v 皆为常数, 从而 $f(z)$ 亦为常数。

2.6.4 导数的矩阵表示

回忆我们可以将复数 $a + ib$ 表示为一个 2×2 矩阵:

$$a + ib \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

现在, 我们将复变函数 $f(z)$ 以 (x, y) 的形式表示:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \quad (2.62)$$

由于

$$f'(z) = u_x + iv_x, \quad (2.63)$$

因此可以将 $f'(z)$ 以矩阵的形式表示为:

$$\begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

利用柯西-黎曼方程, 我们可以用 u_y 替换 $-v_x$, 用 v_y 替换 u_x , 从而得到:

$$f'(z) \leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

这恰好是 $f(x, y)$ 的雅可比矩阵 (Jacobian matrix)⁸。

2.6.5 历史故事: 柯西与复分析的奠基

严格的复分析体系可以说是由一位数学家奠定的——柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)。柯西是 19 世纪最具影响力的法国数学家之一。他最初的职业是军事工程师, 但在 1813 年因健康问题不得不放弃军旅生涯, 转而全身心投入数学研究。

在数学成果的丰硕程度上, 柯西仅次于欧拉 (Leonhard Euler), 他的全集多达 27 大卷。他在数论和行列式理论方面做出了重要贡献, 并被认为是有限群理论的创始人。此外, 他在天文学、力学、光学和弹性理论等领域也有广泛的研究。

⁸实际上, 雅可比矩阵比柯西-黎曼方程更容易记住。由于 $f'(z)$ 是一个复数, 我们可以利用上述矩阵表示来回忆柯西-黎曼方程!

然而，他最卓越的成就在数学分析领域。柯西与其同时代的数学家高斯（Carl Friedrich Gauss）和阿贝尔（Niels Henrik Abel）一道，为极限、连续函数、导数、积分和无穷级数等概念奠定了严谨的理论基础。他所提出的多个级数收敛性判别法至今仍被广泛使用。此外，他首次给出了微分方程解的存在性证明，首次严格证明了泰勒级数的收敛性，并率先认识到傅里叶级数收敛性研究的重要性。然而，他最重要的贡献无疑是在复变函数论领域——基本上是他创建了这一理论，使其成为纯数学和应用数学中最重要的分支之一。在该领域中，柯西积分定理和柯西积分公式已成为现代数学分析不可或缺的基本工具。

不幸的是，尽管柯西在数学上的贡献卓越，但他的性格却未能与其非凡的才华相匹配。他在政治上是一个狂热的保王党，在宗教上则是一个虔诚但固执的信徒，并且喜欢宣扬道德教条。然而，当时的社会风气却以共和主义和怀疑论盛行，因此他的许多科学同僚对他并无好感，甚至认为他是一个伪善而狂妄之人。然而，客观而言，他首先是一位伟大的数学家，同时也是一位信仰虔诚但思想狭隘且执拗之人。

2.7 柯西-黎曼方程的递归性质

我们将解析函数定义为具有复导数的函数。下面的定理表明，如果 f 是解析函数，则其导数 f' 也是解析的。因此，解析函数可以一直求导下去！

定理 2.5 假设 u 和 v 具有连续的二阶偏导数。如果 $f(z) = u + iv$ 是解析函数，则 $f'(z)$ 也是解析函数。

证明： 为了证明 $f'(z)$ 也是解析函数，我们需要证明它满足柯西-黎曼方程。

由于 $f = u + iv$ 是解析的，我们已知：

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad f' = u_x + iv_x. \quad (2.66)$$

设

$$f' = U + iV, \quad (2.67)$$

其中 $U = u_x, V = v_x$ ，那么由柯西-黎曼方程可得：

$$U = u_x = v_y, \quad V = v_x = -u_y. \quad (2.68)$$

我们需要证明：

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x. \quad (2.69)$$

首先，证明 $U_x = V_y$ ：由已知关系，我们有：

$$U_x = v_{yx}, \quad V_y = v_{xy}. \quad (2.70)$$

由于二阶混合偏导数在连续条件下可交换，即 $v_{xy} = v_{yx}$ ，因此

$$U_x = V_y. \quad (2.71)$$

类似地，证明 $U_y = -V_x$ ：

$$U_y = u_{xy}, \quad V_x = -u_{yx}. \quad (2.72)$$

由于 $u_{xy} = u_{yx}$ ，因此

$$U_y = -V_x. \quad (2.73)$$

因此， $f'(z)$ 也满足柯西-黎曼方程，从而 $f'(z)$ 也是解析函数，证毕。

技术细节 在上述证明中，我们假设了所有必要的偏导数均存在。然而，目前我们尚不能保证所有阶的偏导数都存在。稍后我们将证明，解析函数具有任意阶的导数。在此之前，我们暂时假设这一点。无论如何，在大多数实例中，这一点都是显然成立的。

2.8 复变函数汇总

在本节中，我们将考察一些熟悉的函数在复数域中的性质。对于每个函数，我们将完成以下四项任务：

1. 规定其计算方式。
2. 指定分支（若需要），给出其值域。
3. 指定定义域（若需要，需说明割线）。
4. 计算其导数。

大多数情况下，我们可以使用代数规则（如商法则）计算导数。如果必要，我们可以使用柯西-黎曼方程，甚至直接使用导数的极限定义。

定义 2.8 在整个复平面上解析的函数称为整函数 (**entire function**)。例如，我们将看到 $e^z, z^n, \sin z$ 都是整函数。

2.8.1 初等函数

下面列出了一些基本复变函数及其导数。

1. 指数函数：

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

定义域：整个复平面（整函数）。导数：

$$f'(z) = e^z.$$

2. 常数函数：

$$f(z) \equiv c.$$

定义域：整个复平面（整函数）。导数：

$$f'(z) = 0.$$

3. z^n 函数：

$$f(z) = z^n, \quad (n \text{ 为非负整数}).$$

定义域：整个复平面（整函数）。导数：

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

4. 多项式：

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

定义域：整个复平面（整函数）。导数：

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1.$$

5. 倒数函数:

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

定义域: $\mathbb{C} - \{0\}$ (去心平面)。导数:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

6. 有理函数: 设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 均为多项式, 则称

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

为有理函数 (rational function)。

若 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 无公共根, 则

$$\text{定义域} = \mathbb{C} - \{Q \text{ 的根}\}.$$

其导数由商法则给出:

$$f'(z) = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

7. 三角函数 $\sin(z)$ 与 $\cos(z)$:

定义 2.9 复变三角函数定义如下:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2.74)$$

由欧拉公式可知, 当 $z = x$ 为实数时, 这一定义与实变三角函数一致。

定义域: 整个复平面 (即 $\sin(z)$ 和 $\cos(z)$ 是整函数)。

导数:

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z), \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z) \quad (2.75)$$

重要性质:

(a). 三角恒等式:

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad (2.76)$$

(b). 复指数表示:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad (2.77)$$

(c). 周期性:

$$\sin(x + 2\pi + iy) = \sin(x + iy) \quad (2.78)$$

复变三角函数在 x 方向具有周期 2π 。

(d). 无界性: $\sin(z)$ 和 $\cos(z)$ 在复平面上均不是有界函数。

(e). 实虚分量表示: 设 $z = x + iy$, 则

$$\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) \quad (2.79)$$

$$\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \quad (2.80)$$

其中, $\cosh(y)$ 和 $\sinh(y)$ 分别为双曲余弦和双曲正弦函数。

(f). 零点:

- $\sin(z) = 0$ 当且仅当 $z = n\pi$ (其中 n 为任意整数)。
- $\cos(z) = 0$ 当且仅当 $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (其中 n 为任意整数)。

即复变三角函数的零点仍然仅在实轴上, 与实变三角函数一致。

8. 其他三角函数 $\cot(z)$, $\sec(z)$ 等

定义 2.10 这些函数的定义与实变量版本相同。例如:

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \quad \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}$$

定义域: 整个复平面, 去掉分母为零的点。

导数: 使用商法则计算, 例如:

$$\frac{d}{dz} \tan(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin(z)}{\cos(z)} \right) = \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)} = \sec^2(z) \quad (2.81)$$

9. 双曲三角函数 $\sinh(z)$ 与 $\cosh(z)$

定义 2.11 双曲正弦与双曲余弦函数定义为:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (2.82)$$

定义域: 这些函数在整个复平面上均解析 (即为整函数)。

导数:

$$\frac{d \cosh(z)}{dz} = \sinh(z), \quad \frac{d \sinh(z)}{dz} = \cosh(z) \quad (2.83)$$

其他重要性质:

- 双曲函数满足恒等式:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \quad (2.84)$$

- 在实数轴上, $\cosh(x)$ 始终为正实数, 而 $\sinh(x)$ 亦为实数。
- 复变量关系:

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i \sin(z) \quad (2.85)$$

2.8.2 多值函数

1. 对数函数 $\ln(z)$

定义 2.12 复对数函数定义为:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) \quad (2.86)$$

分支选择: 可选取任意分支的 $\arg(z)$ 。

定义域: 复平面 $\mathbb{C}$ 去除某条割线, 该切割处 $\arg(z)$ 发生不连续跳跃。

例 2.10 例如, 规定

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi \quad (2.87)$$

在这种情况下, 对于正实轴上的点 $x_0 > 0$, 考虑极限:

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \ln z = \begin{cases} \lim_{\substack{r=x_0 \\ \theta \rightarrow 0}} (\ln r + i\theta) = \ln x_0, & (\text{割线上岸}) \\ \lim_{\substack{r=x_0 \\ \theta \rightarrow 2\pi}} (\ln r + i\theta) = \ln x_0 + 2\pi i, & (\text{割线下岸}). \end{cases} \quad (2.88)$$

由此可见, 函数在非负实轴上是不连续、不解析的。

导数:

$$\frac{d}{dz} \ln(z) = \frac{1}{z} \quad (2.89)$$

分支点 (branch point) 我们看到, 绝大部分割线上的点的不解析 (不连续) 性都可以通过重新规定割线位置消除, 即它们的不解析是因为割线规定造成。但割线的端点处 (例如, 这里是原点和无穷远点) 的不解析 (不连续) 性无法通过重新规定割线位置消除, 称为分支点或分支点。

- 分支点总是多值函数的奇点。
- $\ln(z)$ 的分支点为 $0, \infty$ 。

确定多值函数的单值分支, 应首先找到多值函数的支点并做割线: z 绕支点一周回到原处, 函数值并不还原, 由此可确定多值函数的支点。再将支点用割线连接, 这样就确定多值函数的单值分支。

2. 复幂函数 z^a (任意复数 a)

定义 2.13 复幂函数定义为:

$$z^a = e^{a \ln(z)} \quad (2.90)$$

分支选择: 可选取任意分支的 $\arg(z)$ 。

定义域: 通常情况下, 定义域为 $\mathbb{C}$ 去除某条割线。特殊情况:

- 若 a 为非负整数, 则 z^a 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析 (即整函数)。
- 若 a 为负整数, 则 z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析。

导数:

$$\frac{d}{dz} z^a = a z^{a-1} \quad (2.91)$$

3. 反正弦函数 $\sin^{-1}(z)$

定义 2.14 反正弦函数定义为:

$$\sin^{-1}(z) = -i \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad (2.92)$$

该定义保证了 $\sin(\sin^{-1}(z)) = z$ 。

解: 设 $w = \sin^{-1}(z)$, 则有:

$$z = \sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (2.93)$$

整理可得二次方程：

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0 \quad (2.94)$$

解关于 e^{iw} 的二次方程：

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2} \quad (2.95)$$

取对数：

$$iw = \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \Rightarrow w = -i \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad (2.96)$$

导数计算：

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (2.97)$$

分支选择： 由于定义中涉及对数和平方根运算，因此分支的选择较为复杂。不同的分支选择将影响 $\sin^{-1}(z)$ 的连续性和解析性质，后续章节将进一步详细讨论。

2.8.3 黎曼面

割线的选择具有一定的任意性。在割线上，单值化后的函数值不连续，这是单值化方法的一个缺点。是否可以定义对数函数，而无需人为地引入割线和单值分支？1851 年，George Riemann 在其博士论文中引入了 **黎曼面** (Riemann surface)。在黎曼面上定义多值函数无需引入割线，也就不需要人为地规定单值分支。

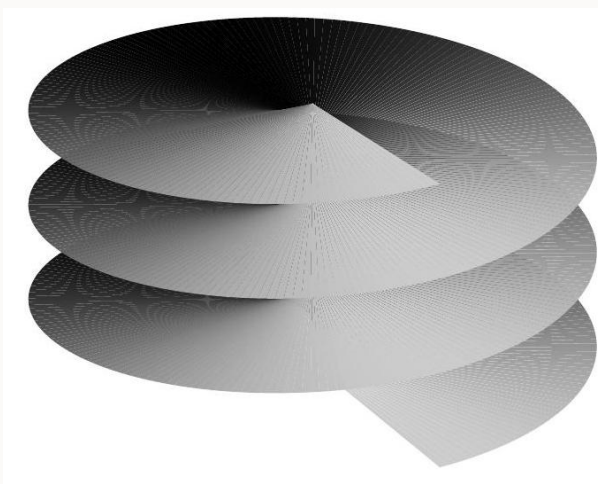


图 24: 对数函数的黎曼面类似于围绕原点的旋转楼梯。

黎曼面的构造 我们可以为复平面上的点贴上不同的标签 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，或者更直观地，用不同的颜色区分辐角的不同取值范围：

$$2n\pi \leq \arg(z) < 2(n+1)\pi \quad (2.98)$$

这样就得到了许多个复平面，每个对应不同的 n 值。对数函数在每个复平面上映射到不同的单值分支。然后，我们按照函数的连续性将这些复平面粘接在一起，就得到了对数函数的黎曼面。每个复平面称为黎曼面的一叶 (sheet)。在黎曼面上，对数函数成为单值函数。

根式函数的黎曼面 平方根式函数 $w = \sqrt{z}$ 具有两个单值分支，分别对应 w 取值的上半平面和下半平面：

$$\begin{aligned} 0 \leq \arg(z) < 2\pi &\Rightarrow \text{单值分支 I: } 0 \leq \arg w < \pi, \\ 2\pi \leq \arg(z) < 4\pi &\Rightarrow \text{单值分支 II: } \pi \leq \arg w < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.99)$$

在几何构造上，我们将两个切开的 z 平面粘接起来，使得：

- 第一个平面的割线下岸 ($\arg(z) = 2\pi$) 与第二个平面的割线上岸 ($\arg(z) = 2\pi$) 相连；
- 第一个平面的割线上岸 ($\arg(z) = 0$) 与第二个平面的割线下岸 ($\arg(z) = 4\pi$) 相连。

这样就构成了 **二叶黎曼面**。

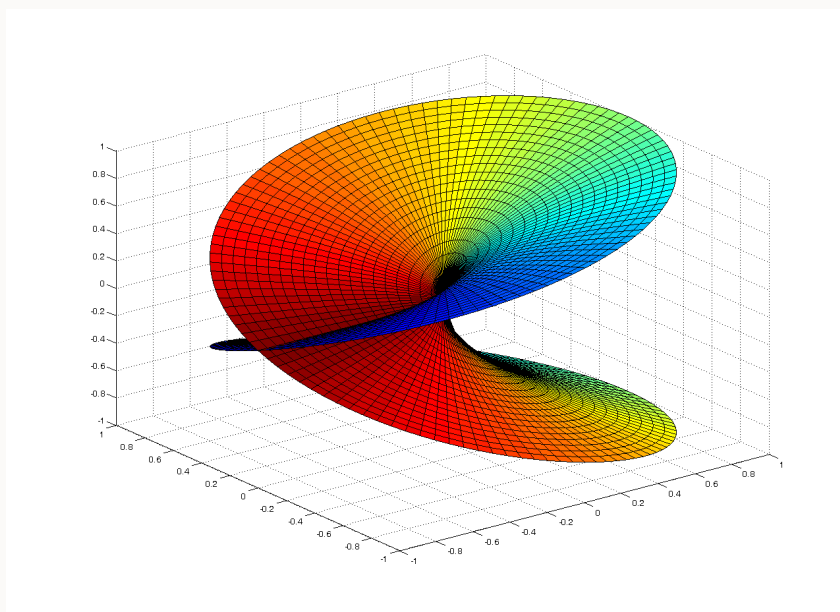


图 25: 根式函数 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面示意图。

对于更复杂的多值函数，例如 $w = \sqrt[3]{z-a}$ 或 $w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ ，可以采用类似的方法构造黎曼面。每个单值分支对应于不同的复平面，并且按照函数的连续性将这些叶面粘接在一起，最终形成完整的黎曼面。⁹

原则上，对于任何多值函数，都可以构造一个黎曼面作为自变量 z 平面的扩展，使其成为单值函数，复杂多值函数的黎曼面可能会变得非常复杂。因此在实际应用中，我们通常仍然采用割线来表示多值函数的单值化。不过，此时的带割线的复平面只是黎曼面的一叶。

⁹感兴趣的同学可以下载 Mathematica 官方的 Notebook 文件绘制复杂函数的黎曼面 ([黎曼面绘图示例](#))

2.9 复合函数

我们通常需要复合函数，即 $f(g(z))$ 。一般来说，在这种情况下，我们可以使用链式法则计算导数。然而，我们需要明确 z 取值的定义域，使得函数在该区域内解析。特别是，当涉及分支和分支割线时，我们需要特别小心。

例 2.11 设 $f(z) = e^{z^2}$ 。由于 e^z 和 z^2 均为整函数，因此 $f(z) = e^{z^2}$ 也是整函数。由链式法则可得：

$$f'(z) = e^{z^2}(2z). \quad (2.100)$$

例 2.12 复合函数的导数有时可能在比原函数更大的区域内解析。例如：

$$f(z) = \ln(z) \quad (2.101)$$

在 C 减去某条分支割线的区域内解析。但它的导数：

$$\frac{d}{dz} \ln(z) = \frac{1}{z} \quad (2.102)$$

在 $C - \{0\}$ 上解析。

例 2.13 确定 $\sqrt{1-z}$ 解析的定义域。

解： 选取主分支，我们知道 $\sqrt{w}$ 在

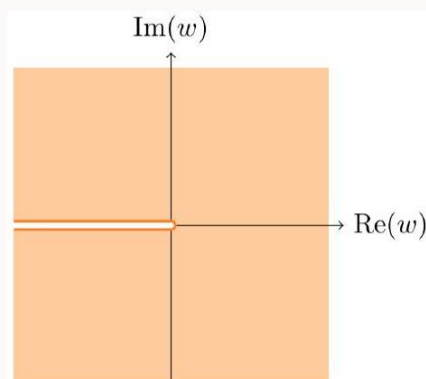
$$C - \{x \leq 0, y = 0\} \quad (2.103)$$

上解析。因此， $\sqrt{1-z}$ 在 $w = 1-z$ 位于分支割线处不解析，即 $w = 1-z$ 取实数且 ≤ 0 时不解析。很容易看出：

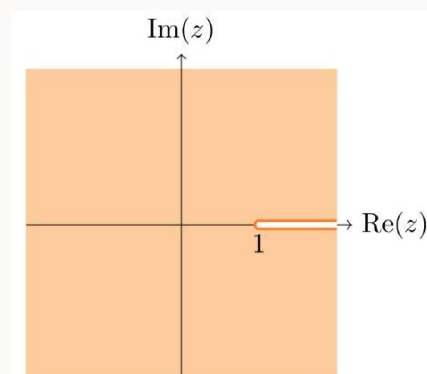
$$w = 1-z \text{ 取实数且 } \leq 0 \iff z \text{ 取实数且 } \geq 1. \quad (2.104)$$

因此， $\sqrt{1-z}$ 的解析区域为：

$$C - \{x \geq 1, y = 0\}. \quad (2.105)$$



(a) 函数 $\sqrt{w}$ 的定义域



(b) 函数 $\sqrt{1-z}$ 的定义域

图 26: 不同函数的定义域比较

注意 对于 $\sqrt{w}$ 选择不同的分支, 将会导致 $\sqrt{1-z}$ 在不同的区域上解析。

例 2.14 确定 $f(z) = \sqrt{1+e^z}$ 解析的定义域。

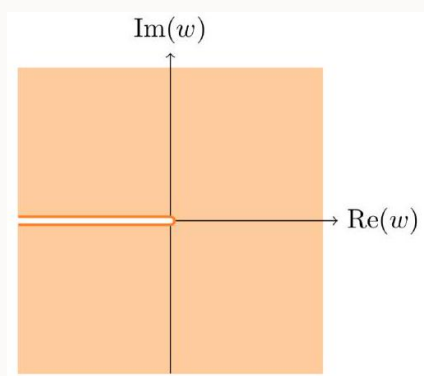
解: 选取主要分支, 我们已知 $\sqrt{w}$ 在

$$C - \{x \leq 0, y = 0\} \quad (2.106)$$

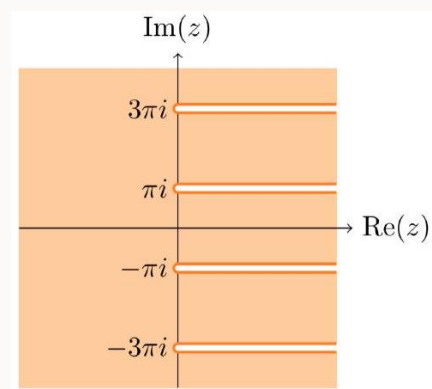
上解析。因此, $f(z)$ 在 $1+e^z$ 取实数且 ≤ 0 时不解析, 即 e^z 取实数且 ≤ -1 时不解析。

由于 $e^z = e^x e^{iy}$, 当 y 为 π 的整数倍时, e^z 取实数。当 y 为奇数倍 π 时, e^z 取负值, 且当 $x > 0$ 时, $|e^z| > 1$ 。因此, $f(z)$ 在以下区域内解析:

$$C - \{x \geq 0, y \text{ 为奇数倍 } \pi\}. \quad (2.107)$$



(a) 函数 $\sqrt{w}$ 的定义域



(b) 函数 $\sqrt{1+e^z}$ 的定义域

图 27: 不同函数的解析区域比较

3 多变量微积分回顾

3.1 符号约定

在本书中，我们使用圆括号表示向量和点。

两个向量若其点积（内积）为零，则称它们是正交的。设 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ， $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ，则它们正交当且仅当：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1, v_2) \cdot (w_1, w_2) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0. \quad (3.1)$$

函数的复合运算表示为 $f(g(z))$ 或 $f \circ g(z)$ ，读作“ f 复合 g ”。

3.2 曲线的参数化

参数化曲线 C ，即 $(x(t), y(t))$ ，其中 t 是参数。可以将其理解为一个运动点在平面上描绘出的轨迹。

例 3.1 设直线从点 (x_0, y_0) 延伸至 (x_1, y_1) ，求其参数化表示。

解： 对于给定的曲线，通常存在多种参数化方式。对于直线，常见的参数化表示为：

$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.2)$$

例 3.2 参数化表示以 (x_0, y_0) 为圆心、半径为 r 的圆。

解： 仍然存在多种参数化方式。通常采用标准参数化，使得圆沿逆时针方向遍历：

$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + r(\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (3.3)$$

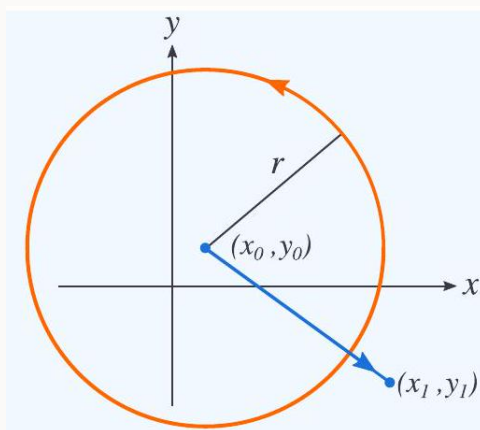


图 28: 从 (x_0, y_0) 到 (x_1, y_1) 的直线（蓝色）；以 (x_0, y_0) 为圆心的圆（橙色）。

3.2.1 链式法则 (Chain Rule)

对于一个标量函数 $f(x, y)$ 和一条参数曲线 $(x(t), y(t))$ ，链式法则 (Chain Rule) 给出：

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} y'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathbf{r}'(t). \quad (3.4)$$

这里 ∇f 是 f 的梯度 (Gradient)。

3.2.2 梯度、旋度与散度 (Gradient, Curl, and Divergence)

- **梯度 (Gradient)**：对于一个标量函数 $f(x, y)$ ，梯度 (Gradient) 定义为：

$$\text{grad } f = \nabla f = (f_x, f_y). \quad (3.5)$$

如果一个向量场 $\mathbf{F}$ 是某个标量函数的梯度，则称该向量场为梯度向量场 (Gradient Vector Field)。

- **旋度 (Curl)**：对于平面上的向量场 $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ ，其旋度 (Curl) 定义为：

$$\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y. \quad (3.6)$$

注意：旋度在二维情况下是一个标量，而在三维情况下，旋度通常是一个向量场。但在二维情形下，旋度向量总是指向 $\hat{k}$ 方向，因此通常省略 $\hat{k}$ ，使旋度成为一个标量。

- **散度 (Divergence)**：对于向量场 $\mathbf{F} = (M, N)$ ，其散度 (Divergence) 定义为：

$$\text{div } \mathbf{F} = M_x + N_y. \quad (3.7)$$

3.2.3 等值曲线 (Level Curves)

回忆，函数 $f(x, y)$ 的等值曲线 (Level Curves) 由等式

$$f(x, y) = \text{常数} \quad (3.8)$$

所定义。等值曲线是函数图像中所有取相同值的点的集合。

此外，梯度 ∇f 在几何上具有重要意义，它始终与 f 的等值曲线正交 (即垂直)，这一性质将在后续应用中广泛使用。

3.3 向量场的曲线积分

向量场的曲线积分的基本组成要素如下：

- 一个向量场 $\mathbf{F} = (M, N)$ 。
- 一条参数曲线 $(x(t), y(t))$ ，其中 $a \leq t \leq b$ 。

向量场 $\mathbf{F}$ 沿曲线 C 的曲线积分定义为：

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C M dx + N dy. \quad (3.9)$$

3.3.1 曲线积分的性质

曲线积分具有以下重要性质：

1. 参数化不变性：曲线积分的值与路径的参数化方式无关。
2. 路径方向改变时，积分符号相反：

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

其中， $-C$ 表示沿相反方向遍历相同的曲线。

3. 对闭合曲线的积分表示：当 C 为闭合曲线时，常用符号 $\oint$ 表示曲线积分：

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C M dx + N dy. \quad (3.11)$$

3.3.2 梯度场的基本定理

定理 3.1 (梯度场的基本定理) 设 $\mathbf{F} = \nabla f$ ，则对于从点 Q 到点 P 的曲线，曲线积分满足：

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(P) - f(Q). \quad (3.12)$$

证明： 由链式法则可得：

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}(t). \quad (3.13)$$

由于假设 $\mathbf{F} = \nabla f$ ，对曲线积分进行计算：

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{df(x(t), y(t))}{dt} dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) \\ &= f(P) - f(Q). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.3 势函数的定义

定义 3.1 (势函数) 若向量场 $\mathbf{F}$ 是梯度场, 即 $\mathbf{F} = \nabla f$, 则称 f 为 $\mathbf{F}$ 的势函数 (**Potential Function**)。

注: 在物理学中, 通常将 f 直接称为 $\mathbf{F}$ 的**势能函数**。

3.3.4 路径无关性与保守场

定义 3.2 (路径无关性) 对于一个向量场 $\mathbf{F}$, 若曲线积分

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.15)$$

仅依赖于积分路径的起点 P 和终点 Q , 而与具体路径无关, 则称该积分是**路径无关的**。

定理 3.2 对于向量场 $\mathbf{F}$, 曲线积分的路径无关性等价于任意闭合路径上的积分为零, 即

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \forall C. \quad (3.16)$$

定义 3.3 (保守向量场) 若一个向量场 $\mathbf{F}$ 具有路径无关的曲线积分, 或等价地, 对于任意闭合路径 C ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.17)$$

则称该向量场为**保守向量场 (conservative vector field)**。

定理 3.3 在连通区域内, 一个梯度场是保守场, 而一个保守场必定是某个标量场的梯度场。

3.4 格林定理

格林定理 (Green's theorem) 将沿简单闭 (simple closed) 曲线¹⁰ C 的线积分与其围成的平面区域 R 上的二重积分联系了起来, 该定理是斯托克斯定理在二维情形下的特例。其中简单闭曲线 C 的方向是逆时针方向 (沿 C 的正向遍历, 内部区域 R 位于左侧)¹¹ 且分段光滑 (piecewise smooth)。

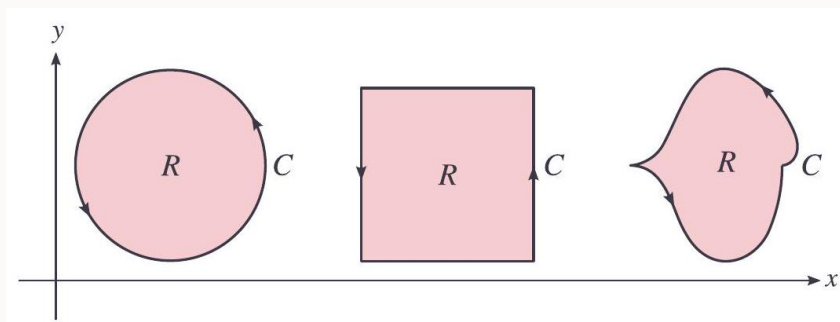


图 29: 分段光滑区域的示例

定理 3.4 (格林定理) 若向量场 $\mathbf{F} = (M, N)$ 在区域 R 上定义并可微, 则有

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R (N_x - M_y) dA. \quad (3.18)$$

用向量形式表示为:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA. \quad (3.19)$$

其中, 旋度 (curl) 定义为:

$$\text{curl } \mathbf{F} := N_x - M_y. \quad (3.20)$$

3.4.1 单连通区域 (Simply Connected Regions)

定义 3.4 (单连通区域) 在平面上, 一个区域 D 被称为单连通的 (simply connected), 如果它没有“洞”。换句话说, 对于 D 内的任意简单单闭合曲线 C , C 的内部完全包含在 D 内。

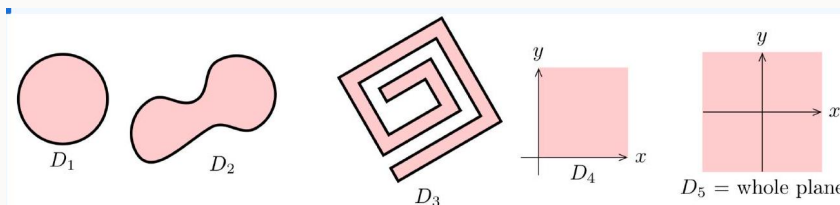


图 30: 单连通区域的示例

例 3.3 在图 30 中, 区域 D_1 到 D_5 均为单连通区域。对于这些区域中的任何简单闭合曲线 C , 其内部完全包含在该区域内。

注意: 有时我们也可以用另一种方式描述单连通性, 即“区域内的任意闭合曲线可以连续收缩成一个点, 而不会离开该区域”。

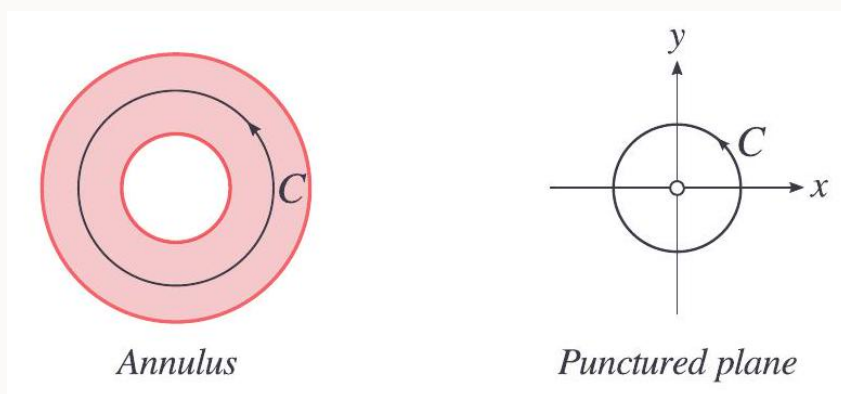


图 31: 非单连通区域的示例

例 3.4 在图 31 中, 这些区域均不是单连通的。对于每个示例, 存在某条简单闭合曲线 C , 使得其内部并不完全包含在该区域内。

3.4.2 势函数定理 (Potential Theorem)

势函数定理是格林定理的一个应用, 它提供了一种方法来判定在单连通区域上的向量场是否为保守场。由于该定理没有一个统一的名称, 我们将其称为**势函数定理**。

定理 3.5 (势函数定理) 设向量场 $\mathbf{F} = (M, N)$ 在区域 D 上定义并可微分, 则:

1. 若 $\mathbf{F}$ 是梯度场, 即 $\mathbf{F} = \nabla f$, 则 $\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y = 0$ 。
2. 若 D 是单连通区域, 且 $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ 在 D 上处处成立, 则存在某个标量函数 f 使得 $\mathbf{F} = \nabla f$ 。

证明: 证明 (a): 若 $\mathbf{F} = (f_x, f_y)$, 则

$$\text{curl } \mathbf{F} = f_{yx} - f_{xy} = 0. \quad (3.21)$$

证明 (b): 设 C 是 D 内的一条简单闭合曲线, 由于 D 是单连通的, 则 C 的内部 R 也完全包含在 D 内。因此, 根据格林定理:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA = 0. \quad (3.22)$$

这表明 $\mathbf{F}$ 在 D 内是保守场, 因此它是某个梯度场。

注意: 在势函数定理中, 单连通性是必要的条件。如果区域 D 内存在孔, 则向量场 $\mathbf{F}$ 可能无法在 C 的内部区域上定义。

3.4.3 格林公式的推广

假设 R 是由两个简单闭合曲线 C_1 和 C_2 所围成的区域。(见图 32)

¹⁰平面上的简单闭合曲线亦称为约当曲线 (Jordan curve), 其定义为在平面上不自相交的连续闭合曲线。

¹¹若无特殊说明, 曲线默认逆时针方向

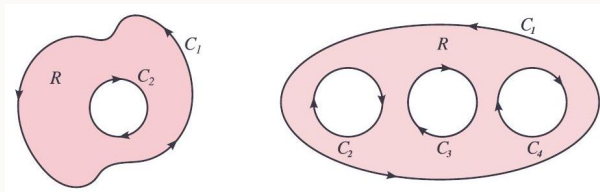


图 32: 多个边界曲线的示例，展示了广义格林公式的应用

(注意，在沿着所示方向遍历曲线时，区域 R 始终位于左侧。)

在这种情况下，格林公式可以推广为：

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA. \quad (3.23)$$

类似地，对于多个边界曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 ，我们有：

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA. \quad (3.24)$$

证明：

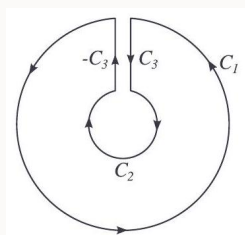


图 33: 广义格林公式的示意图

证明基于图33。我们“切割” C_1 和 C_2 ，并用两条相反方向的 C_3 连接它们。在图 33 中，我们将两条 C_3 画成了分开的曲线，实际上它们是同一条方向相反的曲线。现在，曲线 $C = C_1 + C_3 + C_2 - C_3$ 是一个简单闭合曲线，因此格林公式适用于它。而 C 所围成的区域恰好是 R ，并且两条 C_3 彼此抵消。由此，我们得到：

$$\iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA = \oint_{C_1 + C_3 + C_2 - C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1 + C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.25)$$

这正是我们要证明的广义格林公式，证毕。

例 3.5 设向量场 $\mathbf{F} = \frac{(-y, x)}{r^2}$ (称为“切向场”)。向量场 $\mathbf{F}$ 在 $D =$ 平面去掉原点 $(0, 0)$ (即去心平面) 上是有定义的。对于该切向场 $\mathbf{F}$ ，若 C 是简单闭合曲线 (正向取向)，那么曲线积分 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 可能取哪些值？

解： 我们分两种情况讨论：

1. C_1 不围绕原点；
2. C_2 围绕原点。

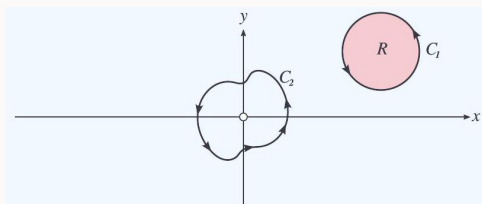


图 34: 两种情况

在情况 1 中，由于闭区域 R 的内部不包含原点（奇异点），因此格林公式适用：

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA = 0. \quad (3.26)$$

在情况 2 中，我们设 C_3 为位于 C_2 内部的一个小圆，半径为 a 。根据广义格林公式：

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{curl } \mathbf{F} dA = 0. \quad (3.27)$$

由此可得：

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.28)$$

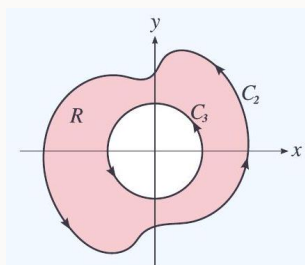


图 35: 情况 2 示意图

利用圆的标准参数化表示，我们可以计算曲线积分：

$$\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \quad (3.29)$$

因此，可能的值为 0 和 2π 。

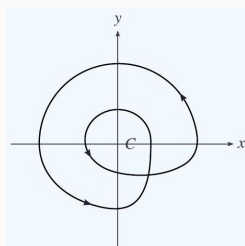


图 36: 一个非简单闭合曲线。

我们可以进一步推广结论：如果 C 不是简单闭合曲线，那么 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 的可能取值为 $2\pi n$ ，其中 n 表示 C 逆时针绕 $(0,0)$ 的圈数。¹²

¹² n 被称为 C 关于原点的卷绕数 (winding number)。此外， n 也等于 C 穿过正 x 轴的次数，若从下方穿过则记为 $+1$ ，从上方穿过则记为 -1 。

4 复变积分

4.1 复变积分的基本概念

复变积分是复平面上的曲线积分，在许多方面与多元微积分中的曲线积分类似。然而，与处理正弦和余弦函数相比，使用指数形式 $e^{i\theta}$ 进行计算通常更加简洁。同样，复变积分也比多变量曲线积分更容易处理，同时能够提供对积分本质的深刻见解。为了定义复变积分，我们需要以下基本要素：

- 复平面： $z = x + iy$
- 复微分： $dz = dx + i dy$
- 复平面中的一条曲线： $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ，其中定义域为 $a \leq t \leq b$
- 复函数： $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

4.2 复变积分

我们定义复变积分 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 为:

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \quad (4.1)$$

需要注意的是, 该表示法与实变量积分非常相似。复变积分不需要 $\mathbb{R}^2$ 中曲线积分所涉及的向量与点乘运算。同时, $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ 仅是两个复数的乘积。

另一种记号使用 $dz = dx + idy$ 来表示积分:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \quad (4.2)$$

容易验证式 (4.1) 与 (4.2) 等价, 式 (4.2) 实际上是一个多元微积分的表达式。

例 4.1 计算沿从 0 到 $1+i$ 的直线 γ 的复变积分:

$$\int_{\gamma} z^2 dz \quad (4.3)$$

解: 我们对曲线进行参数化:

$$\gamma(t) = t(1+i), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4)$$

其导数为:

$$\gamma'(t) = 1+i \quad (4.5)$$

于是, 复变积分为:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 t^2(1+i)^2(1+i)dt \quad (4.6)$$

计算得:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \quad (4.7)$$

例 4.2 计算沿从 0 到 $1+i$ 的直线 γ 的复变积分:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz \quad (4.8)$$

解: 我们使用与前例相同的参数化:

$$\gamma(t) = t(1+i), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.9)$$

于是积分计算如下:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 t(1-i)(1+i)dt = 1 \quad (4.10)$$

例 4.3 计算沿单位圆 γ 的复变积分:

$$\int_{\gamma} z^2 dz \quad (4.11)$$

解: 我们对单位圆进行参数化:

$$\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.12)$$

其导数为:

$$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta} \quad (4.13)$$

于是, 积分计算如下:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} ie^{3i\theta} d\theta = 0 \quad (4.14)$$

例 4.4 计算沿单位圆 C 的复变积分:

$$\int_C \bar{z} dz \quad (4.15)$$

解: 我们对 C 进行参数化:

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4.16)$$

其导数为:

$$\gamma'(t) = ie^{it} \quad (4.17)$$

于是, 积分计算如下:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \quad (4.18)$$

4.3 复变积分的基本定理

这一定理与微积分基本定理完全类似。

定理 4.1 (复变积分的基本定理) 若 $f(z)$ 是区域 A 上的解析函数, 且 γ 是 A 中从 z_0 到 z_1 的一条曲线, 则有:

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_1) - f(z_0) \quad (4.19)$$

证明: 该定理的证明是链式法则的直接应用。我们有:

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \quad (4.20)$$

因此,

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(\gamma(t))|_a^b = f(z_1) - f(z_0) \quad (4.21)$$

证毕。

该定理的另一种等价表述是: 若 f 具有原函数 F , 即满足 $F' = f$, 则有:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (4.22)$$

例 4.5 计算沿从 0 到 $1+i$ 的直线 γ 的积分:

$$\int_{\gamma} z^2 dz \quad (4.23)$$

解: 由观察可得, z^2 的一个原函数为 $F(z) = \frac{z^3}{3}$ 。因此, 根据基本定理:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \quad (4.24)$$

例 4.6 计算沿单位圆 γ 的积分:

$$\int_{\gamma} z^2 dz \quad (4.25)$$

解: 由于 z^2 的原函数为 $F(z) = \frac{z^3}{3}$, 我们可以直接将 γ 的端点代入该原函数进行计算。然而, 单位圆的起点与终点相同, 因此积分值为:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{z(0)}^{z(2\pi)} = 0 \quad (4.26)$$

4.4 路径无关性

我们称积分 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 是路径无关的, 如果它对于具有相同起点和终点的任意两条路径都取相同的值。更精确地说, 若 $f(z)$ 在区域 A 上有定义, 则 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 在 A 中是路径无关的, 当且仅当对于 A 中任意两个端点相同的路径, 其积分值相等。

定理 4.2 (路径无关性) 若 $f(z)$ 在开区域 A 内存在一个原函数, 则对于 A 内所有路径, 其复变积分 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 均为路径无关的。

证明: 由于 $f(z)$ 在 A 内存在一个原函数 $F(z)$, 根据复变积分基本定理, 我们有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (4.27)$$

其中 z_0 和 z_1 分别是路径 γ 的起点和终点。因此, 积分值仅取决于端点, 而与具体路径无关, 证毕。

路径无关性可以用闭合路径积分的性质等价表示。

定理 4.3 下面两个命题等价:

- (1) 积分 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 是路径无关的。
- (2) 对于任意闭合路径 γ , 有

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad (4.28)$$

证明: 证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 假设积分是路径无关的, 考虑如图 37 所示的闭合路径 C 。由于 C 的起点与终点相同, 积分值应该等于单点路径的积分值, 而显然单点路径的积分为 0, 因此:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (4.29)$$

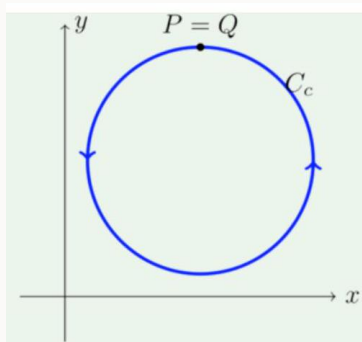


图 37: 闭合路径的积分

证明 (ii) $\Rightarrow$ (i): 设路径 C_1 和 C_2 具有相同的起点和终点, 如图 38 所示。考虑由 C_1 和 $-C_2$ 组成的闭合路径:

$$C = C_1 - C_2 \quad (4.30)$$

由于假设对任意闭合路径 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0$, 因此

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0 \quad (4.31)$$

即

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (4.32)$$

这表明积分仅依赖于路径的端点，而与路径本身无关，即积分是路径无关的。

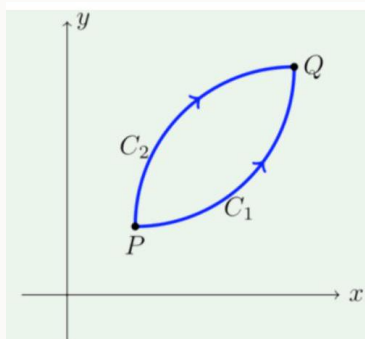


图 38: 路径无关性的等价证明

例 4.7 计算 $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ ，其中 γ 分别为以下围道：

- (i) 从 1 到 $1+i$ 的直线段。
- (ii) 以 $z=3$ 为中心、半径为 1 的圆。
- (iii) 以 $z=0$ 为中心、半径为 1 的圆。

解： 对于 (i) 和 (ii)，可以直接使用 $\log(z)$ 作为原函数计算，因为这些围道位于一个不包含原点的单连通区域内。

(i) 计算沿直线的积分：

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log(1+i) - \log(1) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}. \quad (4.33)$$

(ii) 由于起点和终点相同，直接得出

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0. \quad (4.34)$$

(iii) 对于单位圆，我们使用参数化 $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ ，其中 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。其导数为 $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$ ，因此积分变为：

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i. \quad (4.35)$$

注意，如果使用原函数 $\log(z)$ 计算，必须确保在围绕原点一周时让辐角增加 2π 。

例 4.8 计算 $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ ，其中 γ 为单位圆，分别使用：

1. 基本定理计算。
2. 直接按照定义计算。

解: (i) 基本定理计算: 设 $f(z) = -\frac{1}{z}$, 则 $f'(z) = \frac{1}{z^2}$, 由复变积分基本定理可得:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(\text{终点}) - f(\text{起点}) = 0. \quad (4.36)$$

由于围道的起点和终点相同, 因此积分值为 0。

(ii) 直接计算: 我们仍然使用单位圆的参数化 $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, 其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。其导数为 $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$, 因此积分变为:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} ie^{-i\theta} d\theta. \quad (4.37)$$

计算该积分:

$$\int_0^{2\pi} ie^{-i\theta} d\theta = -e^{-i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (4.38)$$

4.5 柯西定理

柯西定理 (Cauchy's theorem) 对应了无旋矢量场的格林定理。

定理 4.4 (柯西定理) 设 A 是一个单连通区域, $f(z)$ 在 A 上解析, C 是 A 内的一条闭合曲线, 则:

- (i) $\int_C f(z)dz = 0$ 。
- (ii) f 在 A 内的积分是路径无关的, 即任意两个具有相同起点和终点的路径的积分值相同。
- (iii) f 在 A 内具有原函数。

证明: 我们将使用格林定理来证明 (i)¹³。设 R 为闭合曲线 C 内围成的区域, 并将 f 表示为 $f = u + iv$, 则:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy). \quad (4.39)$$

对于实部, 应用格林定理:

$$\int_C udx - vdy = \iint_R (-v_x - u_y)dA = 0. \quad (4.40)$$

对于虚部, 应用格林定理:

$$\int_C vdx + udy = \iint_R (u_x - v_y)dA = 0. \quad (4.41)$$

其中由于柯西-黎曼方程保证 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$, 上述两个积分均为 0, 从而得证 (i)。

对于 (ii), 由 (i) 和定理 4.3 可得路径无关性。

对于 (iii), 选择 A 内一点 z_0 , 定义:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw. \quad (4.42)$$

由于 (ii), 该积分与所选路径无关, 因此 $F(z)$ 是良定义的。若能证明 $F'(z) = f(z)$, 则 F 即为 f 的原函数。展开:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (4.43)$$

由柯西-黎曼方程可得:

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (4.44)$$

即:

$$F'(z) = U_x + iV_x = \frac{1}{i}(U_y + iV_y) = V_y - iU_y. \quad (4.45)$$

设路径 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, 其中 $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(b) = z$, 则:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw = \int_0^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](x'(t) + iy'(t))dt. \quad (4.46)$$

图 39 表示从 z_0 到 z 的任意路径, 可用于计算 $f(z)$ 。计算 F 的偏导数时, 我们需要考虑直线沿 x 轴和 y 轴的微小位移。

¹³也可以给出不依赖格林定理的证明, 但其本质与格林定理的证明类似

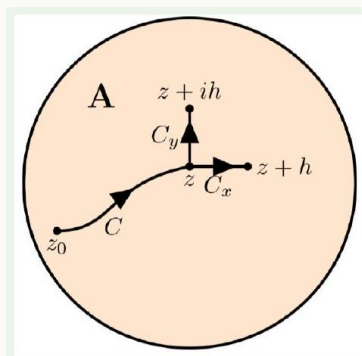


图 39: 柯西定理的路径示意图

由基本微积分定理, 我们有:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h g(t) dt}{h} = g(0). \quad (4.47)$$

计算 $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{C+C_x} f(w) dw - \int_C f(w) dw = \int_{C_x} f(w) dw. \quad (4.48)$$

其中 C_x 由参数化路径 $\gamma(t) = x+t+iy$, $0 \leq t \leq h$ 给出, 因此:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h u(x+t, y) + iv(x+t, y) dt}{h} \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= f(z). \end{aligned} \quad (4.49)$$

计算 $\frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}$: 由于 $w = z+it$, $dw = i dt$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h u(x, y+t) + iv(x, y+t) i dt}{ih} \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= f(z). \end{aligned} \quad (4.50)$$

结合以上两式可得:

$$f(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (4.51)$$

F 解析, 且 $F' = f$, 从而证明了 (iii)。

4.6 柯西定理的推广

柯西定理要求函数 $f(z)$ 在单连通区域上解析。当该条件不满足时，我们可以对其进行有用的推广。

假设 $\bar{R}$ 是由两个简单闭合曲线 C_1 和 C_2 围成的闭区域¹⁴，注意 C_1 和 C_2 都按照逆时针方向取向。

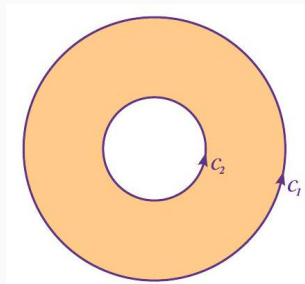


图 40: 柯西定理的推广示意图

定理 4.5 (柯西定理的推广) 若 $f(z)$ 在区域 $\bar{R}$ 内解析，则有：

$$\int_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0. \quad (4.52)$$

证明： 证明基于如下图示。我们“切割”曲线 C_1 和 C_2 ，并用两条方向相反的 C_3 连接它们。（在图中，我们将 C_3 画成了两条曲线，实际上它们是同一条曲线，只是方向相反。）

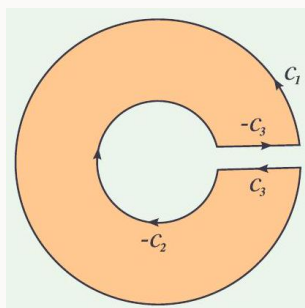


图 41: 通过 C_3 连接的区域

由于 C_3 作为切口，区域 $C_1 + C_3 - C_2 - C_3$ 形成了一个单连通区域，因此可以直接应用柯西定理，得到：

$$\int_{C_1 + C_3 - C_2 - C_3} f(z) dz = 0. \quad (4.53)$$

由于 C_3 和 $-C_3$ 的贡献相互抵消，最终得到：

$$\int_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0. \quad (4.54)$$

证毕。

¹⁴区域 G 加上边界 C 就构成闭区域 $\bar{R}$ ， $\bar{R} = R + C$

注记：这一结论显然可以推出：

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \quad (4.55)$$

进一步推广：使用同样的技巧，通过合适的曲线切割区域，使其成为单连通区域，我们可以证明：如果 f 在下图所示的区域 R 内解析，则有

$$\int_{C_1 - C_2 - C_3 - C_4} f(z)dz = 0. \quad (4.56)$$

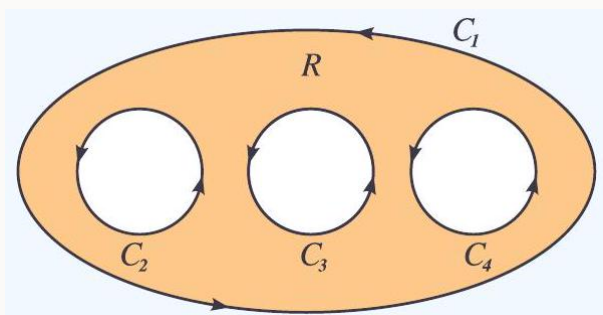


图 42: 区域 $\bar{R}$ 及其边界曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 。

这表明曲线 $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ 构成了区域 $\bar{R}$ 的边界。

曲线方向的确定：一个有效的方法是确保在遍历曲线时，区域 $\bar{R}$ 总是在曲线的左侧。在图示例中，当沿 C_2 、 C_3 和 C_4 方向遍历时，区域 $\bar{R}$ 处于右侧。这就是为什么在描述边界时需要对这些曲线加上负号，从而得到

$$\int_{C_1 - C_2 - C_3 - C_4} f(z)dz = 0. \quad (4.57)$$

4.7 柯西积分公式

定理 4.6 (柯西积分公式) 设 C 是一条简单闭合曲线，并且函数 $f(z)$ 在包含 C 及其内部的区域上解析（见图 43）。我们假设 C 按逆时针方向取正向，则对于任意 C 内部的点 z_0 ，有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.58)$$

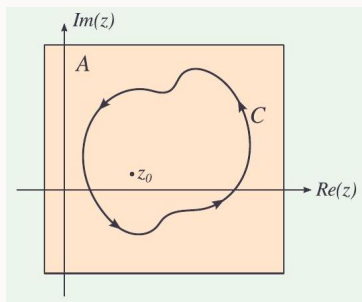


图 43: 柯西积分公式：简单闭合曲线 C ， $f(z)$ 在 C 及其内部解析。

重要性说明 这一结果表明，如果已知函数 f 在边界曲线 C 上的值，那么 f 在 C 内部的所有信息也完全确定了。

通常，我们换用记号（令 $z \rightarrow w$ ， $z_0 \rightarrow z$ ），则柯西积分公式也可以写成：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.59)$$

例 4.9 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$ ，其中 C 为图 44 所示的曲线。

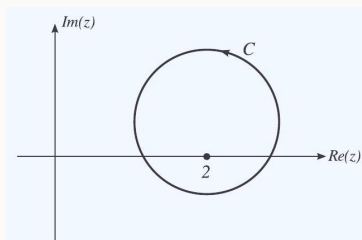


图 44: 示例中的曲线

解： 设 $f(z) = e^{z^2}$ ，显然 $f(z)$ 是整函数。由于 C 是简单闭合曲线（正向），且 $z = 2$ 在 C 内，根据柯西积分公式，该积分的值为：

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^4. \quad (4.60)$$

例 4.10 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$ ，其中 C 为图 45 所示的曲线。

解： 由于 $f(z) = e^{z^2}/(z-2)$ 在 C 及其内部解析，根据柯西定理，该积分的值为：

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz = 0. \quad (4.61)$$

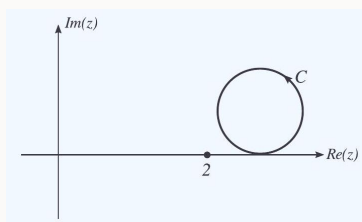


图 45: 示例中的曲线

例 4.11 计算 $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$, 其中 C 为图 46 所示的曲线。

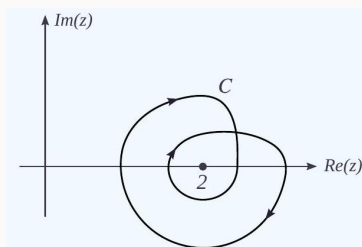


图 46: 示例中的曲线

解: 这一情况更复杂。设 $f(z) = e^{z^2}$ 。曲线 C 在顺时针方向上绕 $z = 2$ 两次, 因此可以将 C 分解为 $C_1 + C_2$, 如图 47 所示。

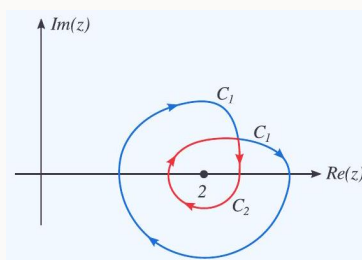


图 47: 解决方案示意图

由于 C_1 和 C_2 都是简单闭合曲线, 我们可以分别对它们应用柯西积分公式 (负号表示它们是顺时针绕过 $z = 2$):

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz. \quad (4.62)$$

由柯西积分公式可得:

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2), \quad (4.63)$$

$$\int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2). \quad (4.64)$$

因此, 最终结果为:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = -4\pi i f(2) = -4\pi i e^4. \quad (4.65)$$

4.8 导数柯西积分公式

柯西积分公式非常重要，我们在此推广至所有阶导数 $f^{(n)}(z)$ 的情况，这将包含之前的函数积分公式作为特例。

定理 4.7 (柯西导数积分公式) 若 $f(z)$ 和 C 满足与柯西积分公式相同的条件，则对于所有 z 在 C 内部的点，有：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

其中， C 是一个简单闭合曲线，以逆时针方向绕行， z 在 C 内部，并且 $f(w)$ 在 C 及其内部解析。

例 4.12 计算积分

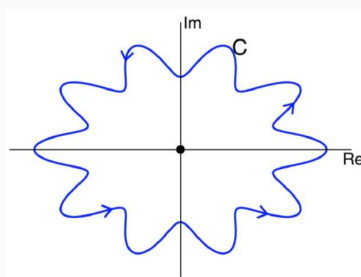
$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$$

其中 $C: |z| = 1$ 。

解： 利用导数柯西积分公式可知，该积分计算十分简单。令 $f(z) = e^{2z}$ ，则：

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{8}{3}\pi i. \quad (4.67)$$

例 4.13 设 C 为下图所示的围道，并计算与前例相同的积分：



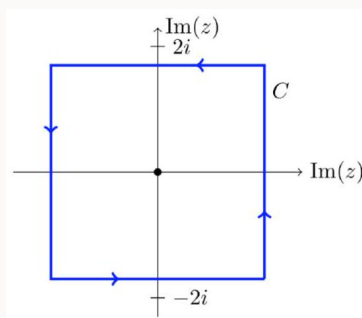
解： 同样，由于积分路径仍然包围 $z = 0$ ，且 $f(z) = e^{2z}$ 在整个区域内解析，因此积分结果与前例相同，即：

$$I = \frac{8}{3}\pi i. \quad (4.68)$$

例 4.14 计算围道 C 上的积分

$$I = \int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2 + 8)} dz \quad (4.69)$$

其中 C 如下图所示。



解： 设

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + 8} \quad (4.70)$$

函数 $f(z)$ 在围道 C 内部解析，因为 $z^2 + 8$ 的根位于围道 C 之外。因此，我们可以将积分重写为：

$$I = \int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2 + 8)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z} dz. \quad (4.71)$$

根据柯西积分公式：

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0). \quad (4.72)$$

计算 $f(0)$ ：

$$f(0) = \frac{\cos(0)}{0^2 + 8} = \frac{1}{8}. \quad (4.73)$$

因此，

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}. \quad (4.74)$$

例 4.15 计算围道 C （图48）上的积分：

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz \quad (4.75)$$

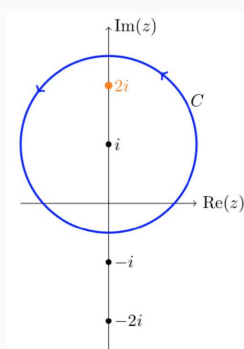


图 48: 围道 C

解： 我们先将分母因式分解：

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2(z + 2i)^2} \quad (4.76)$$

令

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \quad (4.77)$$

显然, $f(z)$ 在围道 C 内解析, 因此可以使用导数柯西积分公式:

$$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz \quad (4.78)$$

由柯西积分公式得:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i f'(2i) \quad (4.79)$$

计算 $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{-2}{(z+2i)^3} \quad (4.80)$$

代入 $z = 2i$:

$$f'(2i) = \frac{-i}{32} \quad (4.81)$$

代入积分公式:

$$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \times \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16} \quad (4.82)$$

故最终结果为:

$$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \frac{\pi}{16} \quad (4.83)$$

例 4.16 计算围道 C 上的积分:

$$\int_C \frac{z}{z^2+4} dz \quad (4.84)$$

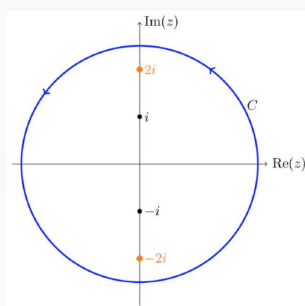


图 49: 围道 C , 包含两个奇点

解: 被积函数在 $z = \pm 2i$ 处有奇点, 而围道 C 将它们都包围住。直接使用先前的方法无法求解, 因为无法找到在 C 内部解析的合适的 $f(z)$ 。我们的解法是将 C 拆分为两个部分。其中围道 C_3 既被正向遍历, 也被反向遍历。先将分母因式分解:

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{z}{(z-2i)(z+2i)} \quad (4.85)$$

定义:

$$f_1(z) = \frac{z}{z+2i}, \quad f_2(z) = \frac{z}{z-2i} \quad (4.86)$$

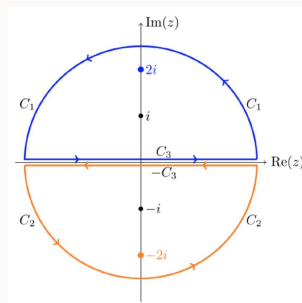


图 50: 将原始围道 C 拆分为两个部分，每个部分各自围绕一个奇点

则可重写为：

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{f_1(z)}{z - 2i} = \frac{f_2(z)}{z + 2i} \quad (4.87)$$

由此，积分可以拆分如下：

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz = \int_{C_1 + C_3 - C_3 + C_2} \frac{z}{z^2 + 4} dz \quad (4.88)$$

进一步拆分：

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz = \int_{C_1 + C_3} \frac{f_1(z)}{z - 2i} dz + \int_{C_2 - C_3} \frac{f_2(z)}{z + 2i} dz \quad (4.89)$$

由于 $f_1(z)$ 在 $C_1 + C_3$ 内解析， $f_2(z)$ 在 $C_2 - C_3$ 内解析，因此可以对两个积分分别应用柯西积分公式：

$$2\pi i (f_1(2i) + f_2(-2i)) \quad (4.90)$$

计算：

$$f_1(2i) = \frac{2i}{2i + 2i} = \frac{1}{2}, \quad f_2(-2i) = \frac{-2i}{-2i - 2i} = \frac{1}{2} \quad (4.91)$$

因此：

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i \quad (4.92)$$

备注 1. 该问题也可以使用部分分式分解方法求解：

$$\frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{A}{z - 2i} + \frac{B}{z + 2i} \quad (4.93)$$

计算可得 $A = f_1(2i)$ ， $B = f_2(-2i)$ ，然后分别应用柯西积分公式即可。

2. 在后续的内容中，我们将介绍柯西留数定理，它能够更简洁地处理此类积分问题。

4.8.1 积分的三角不等式

在第一章中，我们讨论了三角不等式，其表达如下：

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (4.94)$$

等号成立当且仅当 z_1 和 z_2 在同一条从原点出发的射线上或取 0。一个有用的变形为：

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad (4.95)$$

该不等式可以由以下推导得到：

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad (4.96)$$

两边同时减去 $|z_2|$ 即可。

由于积分本质上是求和的极限，这一结果可以推广到积分的不等式，并且我们将以两种形式陈述这一结论。

定理 4.8 (积分的三角不等式) 设 $g(t)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的复值函数，则有：

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt \quad (4.97)$$

等号成立当且仅当 $g(t)$ 在整个区间上仅沿着从原点出发的某一条射线取值。

证明： 通过黎曼和对积分进行逼近，我们得到：

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \approx \left| \sum g(t_k) \Delta t \right| \leq \sum |g(t_k)| \Delta t \approx \int_a^b |g(t)| dt \quad (4.98)$$

其中，中间的不等式是复数求和的标准三角不等式。证毕。

定理 4.9 (积分的三角不等式 II) 设 $f(z)$ 是定义在曲线 γ 上的复函数，则有：

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \quad (4.99)$$

其中 $dz = \gamma'(t)dt$ ，且 $|dz| = |\gamma'(t)|dt$ 。

证明： 这一结论直接由上一定理推出：

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \quad (4.100)$$

证毕。

推论 若 $|f(z)| \leq M$ 在围道 C 上成立，则有：

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot (\text{围道 } C \text{ 的长度}) \quad (4.101)$$

证明： 设 C 的参数方程为 $\gamma(t)$ ，其中 $a \leq t \leq b$ ，则由积分的三角不等式：

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \quad (4.102)$$

由于 $|f(z)| \leq M$ ，则：

$$\int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M \cdot (\text{围道 } C \text{ 的长度}) \quad (4.103)$$

这里我们利用了弧长的定义：

$$|\gamma'(t)| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = ds \quad (4.104)$$

例 4.17 计算实积分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (4.105)$$

解： 关键技巧是对复函数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \quad (4.106)$$

在闭合围道 $C_1 + C_R$ 上进行积分，并证明当 $R \rightarrow \infty$ 时， C_R 对积分的贡献趋于零。

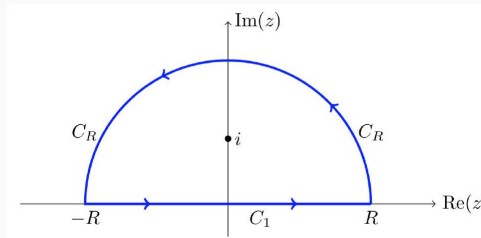


图 51: 围道 $C_1 + C_R$

该函数在围道内部唯一的奇点是 $z = i$ ，设：

$$g(z) = \frac{1}{(z + i)^2} \quad (4.107)$$

由于 $g(z)$ 在围道内部解析，因此由导数柯西积分公式得：

$$\int_{C_1 + C_R} f(z) dz = \int_{C_1 + C_R} \frac{g(z)}{(z - i)^2} dz = 2\pi i g'(i) \quad (4.108)$$

计算 $g'(i)$ ：

$$g'(z) = \frac{-2}{(z + i)^3}, \quad g'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i} \quad (4.109)$$

所以：

$$\int_{C_1 + C_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \quad (4.110)$$

现在，我们对 C_1 和 C_R 进行参数化，计算其积分。

对于 C_1 ，取参数化：

$$\gamma(x) = x, \quad -R \leq x \leq R \quad (4.111)$$

则：

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (4.112)$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时，该积分收敛到我们想要计算的 I 。

对于 C_R ，取参数化：

$$\gamma(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.113)$$

则：

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} i R e^{i\theta} d\theta \quad (4.114)$$

由积分的三角不等式可得：

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{1}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} i R e^{i\theta} \right| d\theta \quad (4.115)$$

由于：

$$\left| R^2 e^{2i\theta} + 1 \right| \geq |R^2 e^{2i\theta}| - |1| = R^2 - 1 \quad (4.116)$$

从而：

$$\frac{1}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1} \Rightarrow \frac{1}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|^2} \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2} \quad (4.117)$$

代入积分估计：

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{(R^2 - 1)^2} d\theta = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} \quad (4.118)$$

显然当 $R \rightarrow \infty$ 时，该项趋于 0，因此：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (4.119)$$

综上所述，由于

$$\int_{C_1 + C_R} f(z) dz = \frac{\pi}{2} \quad (4.120)$$

在 $R \rightarrow \infty$ 时， C_R 的贡献消失，因此：

$$I = \frac{\pi}{2} \quad (4.121)$$

最终计算结果是正实数，符合期望的性质。

4.9 柯西定理的证明

4.9.1 柯西定理的第二次推广

在证明定理之前，我们先引入一个本身也非常有用的定理。

定理 4.10 (柯西定理的第二次推广) 设 A 是包含点 z_0 的单连通区域， $g(z)$ 是满足以下条件的函数：

1. 在 $A - \{z_0\}$ 上解析；
2. 在 A 上连续（特别地， $g(z)$ 在 z_0 处不会发散）。

则对于 A 内的任意闭合曲线 C ，有：

$$\int_C g(z) dz = 0. \quad (4.122)$$

证明： 由柯西定理的推广，我们知道：

$$\int_C g(z) dz = \int_{C_r} g(z) dz \quad (4.123)$$

其中， C_r 是以 z_0 为中心、半径为 r 的圆。

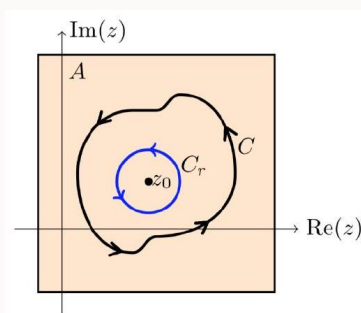


图 52: 围绕 z_0 的小圆 C_r

由于 $g(z)$ 在 C_r 内连续，我们知道 $|g(z)|$ 在该区域内有界，设 $|g(z)| \leq M$ 。由三角不等式的推论可得：

$$\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| \leq M \cdot (\text{曲线 } C_r \text{ 的长度}) = M \cdot 2\pi r. \quad (4.124)$$

由于 r 可以任意小，故当 $r \rightarrow 0$ 时，右侧趋于 0，从而：

$$\int_{C_r} g(z) dz = 0. \quad (4.125)$$

由此可得：

$$\int_C g(z) dz = 0. \quad (4.126)$$

备注 利用此结果，我们可以进一步证明 $g(z)$ 在 z_0 处实际上是解析的。其证明与我们在柯西定理中证明 $g(z)$ 具有原函数的方法相同。

4.9.2 柯西积分公式的证明

柯西积分公式：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.127)$$

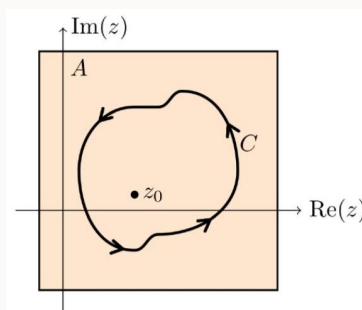


图 53: 柯西积分公式的证明

证明： 我们使用一个常见且十分有用的技巧。定义：

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (4.128)$$

由于 $f(z)$ 在 A 上解析，因此 $g(z)$ 在 $A - \{z_0\}$ 上解析。又由于 $f(z)$ 在 z_0 处可导，我们知道：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f'(z_0). \quad (4.129)$$

也就是说，如果我们定义 $g(z_0) = f'(z_0)$ ，则 g 在 z_0 处连续。根据前述柯西定理的推广，我们有：

$$\int_C g(z) dz = 0. \quad (4.130)$$

即：

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \quad (4.131)$$

由此可得：

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (4.132)$$

由于 $f(z_0)$ 为常数，可以提到积分号外，得到：

$$f(z_0) \int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (4.133)$$

最后一步利用了我们熟知的积分公式：

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i. \quad (4.134)$$

证毕。

4.10 导数柯西积分公式的证明

回顾导数柯西积分公式：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.135)$$

我们首先提供一个简要证明，以便直观理解公式的推导过程，随后给出正式的严格证明。

4.10.1 示意性说明

由于 $f(z)$ 在 A 内部可表示为积分形式，我们可以利用该表示式推导 $f'(z)$ 的积分表示形式：

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw \right]. \quad (4.136)$$

利用微分算子作用于被积函数：

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dz} \left(\frac{f(w)}{w-z} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw. \quad (4.137)$$

由于 $z \in A$ 且 $w \in C$ ，显然 $w-z \neq 0$ ，因此：

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw. \quad (4.138)$$

类似地，通过数学归纳法，我们可以对该过程进行迭代，从而推导出更高阶导数的公式。

4.10.2 正式证明

考虑极限表达式：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (4.139)$$

利用积分表示式：

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z - \Delta z} dw, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.140)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_C \left(\frac{f(w)}{w - z - \Delta z} - \frac{f(w)}{w - z} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_C \frac{f(w) \Delta z}{(w - z - \Delta z)(w - z)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2 - \Delta z(w - z)} dw. \end{aligned} \quad (4.141)$$

令 $\Delta z \rightarrow 0$ ，我们得到：

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw. \quad (4.142)$$

由于被积函数连续，并且分母不会为 0，因此可将极限移入积分号内，从而证明公式的正确性。

4.11 柯西积分公式的其他推论

4.11.1 导数的存在性

定理 4.11 假设 $f(z)$ 在区域 A 上解析, 则 f 存在任意阶导数。

证明: 这一结论直接来源于导数柯西积分公式。既然我们已经有了计算各阶导数的公式, 显然这些导数均存在。

更严格地说: 对于 A 内的任意点 z_0 , 我们可以在其周围取一个小圆盘, 使其完全包含于 A 。设 C 为该圆盘的边界, 则柯西积分公式为所有导数 $f^{(n)}(z_0)$ 提供了积分表示式, 从而确保这些导数的存在。

备注:

- 我们在之前的讨论中曾假设, 对于解析函数 $f = u + iv$, 其实部 u 和虚部 v 具有连续的高阶偏导数。上述定理证实了这一点, 特别是保证了 $u_{xy} = u_{yx}$ 。

4.11.2 柯西不等式

定理 4.12 (柯西不等式) 设 C_R 为圆周 $|z - z_0| = R$, 并且假设 $f(z)$ 在 C_R 及其内部 (即圆盘 $|z - z_0| \leq R$) 内解析。定义

$$M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|. \quad (4.143)$$

则对于任意 $n \geq 1$, 有

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}. \quad (4.144)$$

证明: 由导数柯西积分公式, 我们有:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} |dw|. \quad (4.145)$$

由于 $|f(w)| \leq M_R$, 并且 $|w - z_0| = R$, 则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} \int_{C_R} |dw|. \quad (4.146)$$

由圆周长度 $\int_{C_R} |dw| = 2\pi R$, 可得:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}. \quad (4.147)$$

证毕。

4.11.3 刘维尔定理 (Liouville's Theorem)

定理 4.13 (刘维尔定理) 若 $f(z)$ 是整个复平面上的整函数, 并且存在常数 M 使得对所有 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $|f(z)| < M$, 则 $f(z)$ 必为常数。

证明： 对于任意以 z_0 为中心、半径为 R 的圆，柯西不等式给出：

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}. \quad (4.148)$$

由于 R 可以任意增大，因此极限 $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R} = 0$ ，从而 $|f'(z_0)| = 0$ 对所有 $z_0 \in \mathbb{C}$ 成立。这意味着 $f(z)$ 在整个复平面上处处为常数。

注意：

- 例如， $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ ， $\sin(z)$ ， e^z 等函数均为整函数，但它们并非有界函数，因此它们不会是常数。

4.11.4 最大模定理

最大模定理大致表述为：如果 f 在闭区域 $\bar{A}$ 解析且非常数函数，则 $|f(z)|$ 在 $\bar{A}$ 内不会取得局部最大值， $|f(z)|$ 的最大值只能出现在 $\bar{A}$ 的边界上。

为了证明最大模定理，我们首先证明均值性质，这不仅有助于理解最大模定理，其本身也是一个重要且有意义的结论。

定理 4.14 (均值性质) 假设 $f(z)$ 在以 z_0 为中心、半径为 r 的闭圆盘内解析，即 $|z - z_0| \leq r$ ，则有：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.149)$$

证明： 该结论是柯西积分公式在圆盘 $D_r = \{z - z_0 \mid |z - z_0| \leq r\}$ 上的一个直接推论。

首先，我们对边界曲线 C_r 进行参数化：

$$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.150)$$

计算导数：

$$\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}. \quad (4.151)$$

由柯西积分公式可得：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.152)$$

代入参数化表达式：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta. \quad (4.153)$$

化简后得：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.154)$$

这证明了均值性质。

均值性质的直观解释是： $f(z_0)$ 等于其在圆周上的取值的算术平均值。接下来，我们将精确表述并证明最大模定理。在应用该定理时，需注意验证其假设条件是否满足。

定理 4.15 (最大模定理) 假设 $f(z)$ 在连通区域 A 内解析, 且 z_0 为 A 内的一个点, 则:

- (1) 如果 $|f|$ 在 z_0 处取得局部最大值, 则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内为常数;
- (2) 如果 $\bar{A}$ 是有界连通区域, 且 f 在 ∂A 上连续, 则 f 要么是常数, 要么 $|f|$ 的全局最大值只能出现在 $\bar{A}$ 的边界上。

证明: 对于 (1), 利用均值性质和三角不等式, 我们来证明该结论。

由于 z_0 是 $|f|$ 的局部最大值, 对于 z_0 周围任意足够小的圆 $C: |z - z_0| = r$, 在圆周上有 $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ 。因此, 由均值性质和三角不等式, 我们有:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \quad (\text{均值性质}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \quad (\text{三角不等式}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta \quad (\text{由于 } |f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|) \\ &= |f(z_0)| \end{aligned} \quad (4.155)$$

由于不等式的左右两端相等, 这意味着链式不等关系中的所有不等式必须全部取等号:

- 第一项取等号仅当对所有 θ , $f(z_0 + re^{i\theta})$ 都在同一条从原点出发的射线上, 即它们的辐角相同, 或者都为零
- 第二项取等号仅当所有点上 $|f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|$

由此可见, f 在圆周上处处相等, 即 $f(z)$ 在 z_0 附近的小圆盘内是常数。

对于 (2), 假设 $\bar{A}$ 是有界连通区域, 且 f 在 $\bar{A}$ 上连续, 则根据分析学中的极值定理, $|f|$ 在 $\bar{A}$ 上必然取得最大值。根据第一部分的结论, 若 $|f|$ 在 $\bar{A}$ 内部取得最大值, 则 f 在某个邻域内为常数。由于 $\bar{A}$ 是连通的, 推出 f 在整个 $\bar{A}$ 内恒为常数。

若 f 不是常数, 则 $|f|$ 的最大值必然发生在 $\bar{A}$ 的边界上, 证毕。

例 4.18 求 e^z 在单位正方形区域 $0 \leq x, y \leq 1$ 上的最大模。

解: 计算模长:

$$|e^{x+iy}| = e^x \quad (4.156)$$

由于 e^x 是关于 x 单调递增的, 所以其最大值发生在 $x = 1$ 处, 而 y 在 $[0, 1]$ 区间内可取任意值。因此, 最大模为:

$$\max_{0 \leq x, y \leq 1} |e^z| = e \quad (4.157)$$

这个最大值确实出现在单位正方形的边界上。

例 4.19 求 $\sin(z)$ 在正方形区域 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 上的最大模。

解: 我们利用公式:

$$\sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (4.158)$$

计算其模长的平方:

$$\begin{aligned}
 |\sin(z)|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
 &= \sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y \\
 &= \sin^2 x + \sinh^2 y
 \end{aligned} \tag{4.159}$$

其中, $\sin^2 x$ 在 $x = \pi/2$ 和 $x = 3\pi/2$ 处取最大值 1, 而 $\sinh^2 y$ 在 $y = 2\pi$ 处取最大值。因此, 最大模为:

$$\sqrt{1 + \sinh^2(2\pi)} = \sqrt{\cosh^2(2\pi)} = \cosh(2\pi) \tag{4.160}$$

该最大模出现在区域边界上的点:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi i, \quad z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi i \tag{4.161}$$

例 4.20 假设 $f(z)$ 是整函数, 并且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 证明 $f(z) \equiv 0$ 。

证明: 这是一个标准的最大模原理应用问题。策略是展示 $|f(z)|$ 的最大值不会出现在适当选择的区域边界上, 从而推出 $f(z)$ 必须是常数函数。

固定 z_0 , 对任意 $R > |z_0|$, 设 M_R 为圆周 $|z| = R$ 上 $|f(z)|$ 的最大值。最大模定理表明:

$$|f(z_0)| \leq M_R \tag{4.162}$$

由于已知 $f(z) \rightarrow 0$ 当 $R \rightarrow \infty$, 因此 M_R 也必须趋于 0, 即:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0 \tag{4.163}$$

这意味着对任意 z_0 都有 $|f(z_0)| = 0$, 即 $f(z) \equiv 0$, 证毕。

5 解析函数的无穷级数展开

与实数情形类似, 将函数表示为“更简单”函数的无穷级数形式非常重要。我们从复数序列与级数的基本性质入手, 并推导出某些复变函数的级数表示。其中大部分讨论是高等数学中实数级数的直接推广。

5.1 复数级数

一个复数序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 被称为收敛于极限 z , 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z - z_k| = 0. \quad (5.1)$$

换句话说, 对于任意正数 ε , 存在一个正整数 N , 使得当 $k > N$ 时, 总有

$$|z - z_k| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

读者可以证明, 复数序列的极限的实部(虚部)等于该序列的实部(虚部)的极限。

通过部分求和, 级数可以转化为序列。例如, 研究无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad (5.3)$$

时, 我们定义部分和

$$Z_n := \sum_{k=1}^n z_k, \quad (5.4)$$

并考察序列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 。因此, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z, \quad (5.5)$$

则称无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛于 Z 。

如果复数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ 收敛, 则该级数的实部 $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ 和虚部 $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ 也收敛。根据高等数学的知识, 实数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ 收敛的一个必要条件是

$$x_k \rightarrow 0, \quad y_k \rightarrow 0 \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时}). \quad (5.6)$$

因此, 复数级数收敛的必要条件是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0. \quad (5.7)$$

由此可知, 级数的各项必须有界, 即存在正数 M 使得对所有 k 都有

$$|z_k| < M. \quad (5.8)$$

如果复数级数的绝对值级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \quad (5.9)$$

收敛, 则称该复数级数**绝对收敛**。显然, 绝对收敛必然意味着该级数收敛。

5.1.1 常用的级数收敛性判别法

以下列出几个最常用的级数收敛性判别法。这些判别法的成立条件都要求：“若存在 $N \in \mathbb{N}$ ，对所有 $n > N$ ”，

- **比较判别法**：若存在 $N \in \mathbb{N}$ ，对所有 $n > N$ ，均有

$$|u_n| < v_n, \quad (5.10)$$

且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 也收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。
若存在 $N \in \mathbb{N}$ ，使得对所有 $n > N$ 均有

$$|u_n| > v_n > 0, \quad (5.11)$$

且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 也发散。

- **比值判别法**：若存在一个与 n 无关的常数 ρ ，使得：

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \rho < 1, \quad (5.12)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

若

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > \rho > 1, \quad (5.13)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散。

- **达朗贝尔判别法**：若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1, \quad (5.14)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

若

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1, \quad (5.15)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散。

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1, \quad (5.16)$$

则需要使用高斯判别法进一步检验级数的收敛性。

- **高斯判别法**：设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 的邻项比值可以表示为：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O(n^{-\lambda}), \quad (5.17)$$

其中 $\mu = a + ib, \lambda > 1$ ，符号 O 表示数量级。

若 $a > 1$ ，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

若 $a \leq 1$ ，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 发散。

- 柯西判别法：若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1, \quad (5.18)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} > 1, \quad (5.19)$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散。

5.2 函数级数

设 $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ 在区域 A 内有定义。若对于 A 内一点 z_0 , 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$ 收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 z_0 点收敛。反之, 若 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$ 发散, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 z_0 点发散。

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在区域 A 内每一点都收敛, 则称级数在 A 内 (逐点) 收敛, 其和函数 $f(z)$ 是 A 内的单值函数。

5.2.1 一致收敛性

定义 5.1 (一致收敛) 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个与 z 无关的整数 $N(\varepsilon)$, 使得对于所有 $n > N(\varepsilon)$ 及 $z \in A$, 都有

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon, \quad (5.20)$$

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在区域 A 内一致收敛。

一般来说, 整数 $N(\varepsilon)$ 可能依赖于 z ; 也就是说, 对于不同的 z , 我们可能需要选择不同的 $N(\varepsilon)$ 。当 $N(\varepsilon)$ 独立于 z 时, 我们称该收敛为一致收敛。显然, 一致收敛的概念总是和一定的区域联系在一起, 即级数的一致收敛是它在某个区域内的性质。

判断级数是否一致收敛, 除了直接使用定义外, 还常用 Weierstrass 的 M 判别法。

定理 5.1 (M 判别法) 若存在常数 $N > 0$, 使得对于任意 $k > N$ 及 $z \in A$, 都有

$$|u_k(z)| < a_k, \quad (5.21)$$

其中 a_k 与 z 无关, 且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 A 内绝对且一致收敛。

一致收敛级数具有以下重要性质:

• 连续性与逐项求极限

若 $u_k(z)$ 在 A 内连续, 且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 A 内一致收敛, 则其和函数

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \quad (5.22)$$

也在 A 内连续。

这一性质表明, 如果级数的每一项都是连续函数, 则一致收敛级数可以逐项求极限:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{z \rightarrow z_0} u_k(z) \right]. \quad (5.23)$$

• 逐项积分

设 C 是区域 A 内的一条分段光滑曲线, 若 $u_k(z)$ 在 C 上连续, 则对于 C 上一致收敛的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$, 可以逐项积分:

$$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z) dz. \quad (5.24)$$

- 逐项求导：韦尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理

设 $u_k(z)$ 在 A 中单值解析，且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 A 中一致收敛，则其和函数 $f(z)$ 是 A 内的解析函数，且其各阶导数可以通过逐项求导得到：

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z). \quad (5.25)$$

此外，求导后的级数在 G 内依旧一致收敛。

5.3 几何级数

理解几何级数对于利用柯西积分公式理解解析函数的幂级数表示非常重要。在这一节中，我们将讨论几何级数的定义、求和公式以及它们与柯西积分公式的关系。

定义几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (5.26)$$

其中几何级数的部分和为：

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}. \quad (5.27)$$

当 $|z| < 1$ 时，有 $z^n \rightarrow 0$ ，此时部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - z}. \quad (5.28)$$

而当 $|z| \geq 1$ 时，由于 $|z^n| \geq 1$ ，不满足级数收敛的必要条件，因此几何级数发散。

综上所述，几何级数的收敛性如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1, \\ \text{发散}, & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (5.29)$$

注意 所有关于收敛函数级数的等式，一定都是有条件的，即这些等式仅在函数级数收敛的区域内有效。因此，在使用这些等式时，必须明确标注其适用范围。

5.3.1 几何级数与柯西积分公式的关系

柯西积分公式表明：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (5.30)$$

在积分中，我们有表达式：

$$\frac{1}{w - z} \quad (5.31)$$

这个表达式与几何级数的和形式非常相似。我们将频繁使用以下的变换：

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - z/w} = \frac{1}{w} \left(1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \cdots \right) \quad (5.32)$$

该式中的几何级数的比值是 z/w 。因此，当 $|z/w| < 1$ 时，级数收敛，也就是说级数展开公式是有效的，等价地，当

$$|z| < |w| \quad (5.33)$$

时公式成立。类似地，我们也可以得到：

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - w/z} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{w}{z} + \left(\frac{w}{z}\right)^2 + \cdots \right) \quad (5.34)$$

该级数收敛，即公式有效，当 $|w/z| < 1$ 时，也就是说当

$$|z| > |w| \quad (5.35)$$

时公式成立。

5.4 幂级数的收敛性

幂级数是关于 $(z - z_0)$ 的无穷幂和。具体而言，幂级数的形式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (5.36)$$

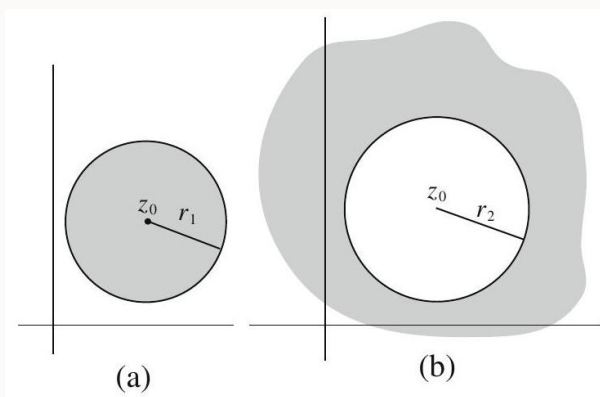


图 54: (a) 具有正指数的幂级数在圆的内部点处收敛，其中 $r_1 = |z_1 - z_0|$ 。(b) 具有负指数的幂级数在圆的外部点处收敛，其中 $r_2 = |z_2 - z_0|$ 。

定理 5.2 若幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (5.37)$$

在 $z = z_1$ 处收敛（假设 $z_1 \neq z_0$ ），则对于所有满足

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| \quad (5.38)$$

的 z ，该级数绝对收敛，同时在圆中 ($|z - z_0| \leq r$ ，其中 $r < |z_1 - z_0|$) 一致收敛。

类似地，若级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} \quad (5.39)$$

在 $z = z_2$ 处收敛（假设 $z_2 \neq z_0$ ），则对于所有满足

$$|z - z_0| > |z_2 - z_0| \quad (5.40)$$

的 z ，该级数绝对收敛，同时在 ($|z - z_0| \geq r$ ，其中 $r > |z_2 - z_0|$) 一致收敛。

该定理的核心内容是：若一个仅包含正幂的幂级数在 z_0 距离为 r_1 处的某点收敛，则它在以 z_0 为中心、半径为 r_1 的圆的内部所有点均收敛。类似地，若一个仅包含负幂的幂级数在 z_0 距离为 r_2 处的某点收敛，则它在以 z_0 为中心、半径为 r_2 的圆的外部所有点均收敛（见图 54）。

证明： 我们证明命题的第一部分，第二部分的证明类似。

由于级数在 $z = z_1$ 处收敛，所有项的绝对值满足

$$|a_k (z_1 - z_0)^k| < M, \quad (5.41)$$

其中 M 是某个正数。因此,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k(z_1-z_0)^k \frac{(z-z_0)^k}{(z_1-z_0)^k} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k(z_1-z_0)^k \right| \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} MB^k(z),\end{aligned}\tag{5.42}$$

其中

$$B(z) := \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right| < 1.\tag{5.43}$$

由于几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty} B^k(z)$ 收敛, 我们有:

$$\sum_{k=0}^{\infty} MB^k(z) = M \sum_{k=0}^{\infty} B^k(z) = \frac{M}{1-B(z)}.\tag{5.44}$$

因此绝对收敛。

当 $|z-z_0| \leq r < |z_1-z_0|$ 时

$$B(z) = \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right| \leq B := \frac{r}{|z_1-z_0|},\tag{5.45}$$

由于常数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ 收敛, 级数一致收敛, 证毕。

幂级数构造原则 在构造幂级数时, 若级数适用于圆内部的点, 则使用正幂; 若级数适用于圆外部的点, 则使用负幂。

5.4.1 幂级数收敛半径

上述定理意味着, 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛点与发散点之间存在一个分界线, 而且这个分界线一定是圆周。圆内区域称为幂级数的**收敛圆**。收敛圆的圆心一定是 $z = z_0$ 点, 收敛圆的半径称为**收敛半径**。

柯西-阿达马 (Cauchy-Hadamard) 公式 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, 其收敛半径 R 由下式确定:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{1/n}\tag{5.46}$$

达朗贝尔判别法 若极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 存在, 则收敛半径为:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|\tag{5.47}$$

5.5 解析函数的泰勒展开

幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数。我们现在提一个相反的问题：如何把一个解析函数表示成幂级数？

定理 5.3 (泰勒级数) 设函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆 C 内及 C 上解析，则对于圆内的任何 z 点， $f(z)$ 可用幂级数展开为（或者说， $f(z)$ 可在 z_0 点展开为幂级数）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.48)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (5.49)$$

证明：

对于 C 上的 w 我们有：

$$|z - z_0| < |w - z_0| \quad (5.50)$$

因此，

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1 \quad (5.51)$$

因此，

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \quad (5.52)$$

利用这个式子和柯西公式，我们得到：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (5.53)$$

最后一个等式来自柯西公式的导数公式，证毕。

推论 解析函数在某点 z_0 处的幂级数表示是唯一的。也就是说，系数由函数 $f(z)$ 唯一决定。

定理 5.4 假设 $f(z)$ 在圆盘 $|z - z_0| < r$ 上是解析的，并且 f 不是恒等于 0。那么，存在一个整数 $k \geq 0$ ，使得 $a_k \neq 0$ ，并且 f 在 z_0 处的泰勒级数为：

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots) \\ &= (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \end{aligned} \quad (5.54)$$

其中整数 k 被称为 f 在 z_0 处的零点的阶数 (order)。

证明： 由于 $f(z)$ 不是恒等于 0，泰勒级数中的并非所有系数都是 0。因此， k 为第一个非零系数的指标。

定理 5.5 如果 $f(z)$ 是解析函数且不恒为零，那么 f 的零点是孤立的。(孤立的意思是可以在任何零点周围画一个小圆盘，使得这个圆盘内没有其他零点。)

证明： 假设 $f(z_0) = 0$ 。将 f 表示为两个因子的乘积：

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \quad (5.55)$$

其中：

$$g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (5.56)$$

显然，当 $z \neq z_0$ 时 $(z - z_0)^k \neq 0$ 。并且 $g(z_0) = a_k \neq 0$ ，所以 $g(z)$ 在 z_0 的某小邻域内不为零。因此，我们得出结论，在这个邻域内，乘积仅在 $z = z_0$ 时为零，即 z_0 是孤立的零点。

例 5.1 计算函数 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 周围的泰勒级数。

解： 由于 $f'(z) = e^z$ ，我们有 $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ 。所以，

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (5.57)$$

例 5.2 在 $z = 0$ 周围展开 $f(z) = z^8 e^{3z}$ 。

解： 令 $w = 3z$ 。所以，

$$e^{3z} = e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^n \quad (5.58)$$

因此，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+8} \quad (5.59)$$

例 5.3 求 $\sin(z)$ 在 $z = 0$ 周围的泰勒级数。

解： 我们给出两种方法来计算这个级数。

• 方法 1.

$$f^{(n)}(0) = \frac{d^n \sin(z)}{dz^n} = \begin{cases} (-1)^m & \text{对于 } n = 2m + 1 \text{ (奇数)}, m = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{对于 } n \text{ (偶数)} \end{cases} \quad (5.60)$$

• 方法 2. 使用

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (5.61)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{i^n z^n}{n!}\end{aligned}\quad (5.62)$$

注意：我们需要绝对收敛性才能相加级数。

结论：

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (5.63)$$

该级数在 $|z| < \infty$ 时收敛。

例 5.4 在 $z = 0$ 处展开

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5} \quad (5.64)$$

解： 注意到 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个奇点，因此我们不能期望得到一个收敛的泰勒级数展开。首先，可以将 $f(z)$ 表示为：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{2(1 + z^2) - 1}{1 + z^2} = \frac{1}{z^3} \left[2 - \frac{1}{1 + z^2} \right] \quad (5.65)$$

接下来，利用几何级数展开公式：

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (5.66)$$

将此结果代入原式，得到：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} (2 - 1 + z^2 - z^4 + \dots) = \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \quad (5.67)$$

注意：前两项称为奇异 (singular) 或主要部分，即含有 z 的负幂次；后面的级数部分称为常规 (regular) 部分或解析部分。由于几何级数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z| < 1$ 时收敛，因此该级数在 $0 < |z| < 1$ 的区域内有效。

例 5.5 求函数

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} \quad (5.68)$$

在 $z = 5$ 处的泰勒级数，并给出收敛半径。

解： 我们需要将其转化为标准的几何级数形式。

$$f(z) = \frac{1}{-4(1 + \frac{z-5}{4})} = -\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{z-5}{4} \right) + \left(\frac{z-5}{4} \right)^2 - \left(\frac{z-5}{4} \right)^3 + \dots \right] \quad (5.69)$$

由于 $f(z)$ 在 $z = 1$ 处有奇点，因此收敛半径是 $R = 4$ 。我们也可以通过考虑几何级数来得出这一点。几何级数的比值是 $\frac{z-5}{4}$ ，因此当 $|\frac{z-5}{4}| < 1$ ，即 $|z - 5| < 4$ 时，级数收敛。即收敛半径为 $R = 4$ 。

例 5.6 是否存在以下级数

$$\sum a_n(z-2)^n \quad (5.70)$$

在 $z=0$ 处收敛, 而在 $z=3$ 处发散吗?

解: 不存在! 我们知道, 级数的中心是 $z_0=2$ 。根据收敛半径的性质, 级数在其收敛半径外是发散的。因此, 如果级数在 $z=0$ 处收敛, 那么收敛半径至少为 2。由于 $|3-z_0|=|3-2|=1<2$, 所以 $z=3$ 应该在收敛盘内。

对于多值函数, 在适当规定了单值分支后, 即可像单值函数那样在解析点邻域内作泰勒展开。

例 5.7 (多值函数的泰勒展开) 求多值函数 $\ln(z)$ 在 $z_0=1$ 的泰勒展开。

解: 多值函数 $f(z)=\ln z$ 的支点为 $z=0, \infty$ 。现在的展开中心 $z_0=1$ 并非支点, 在它的邻域上, 各个单值分支互相独立, 各自是一个单值函数, 可按照单值函数的展开方法加以展开。

函数 $\ln(z)$ 可表示为定积分, 因此

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln(z) - \ln(z)|_{z=1} + \ln(z)|_{z=1} \\ &= \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta + \ln 1 \\ &= \int_1^z \frac{1}{1-(1-\zeta)} d\zeta + \ln 1 \\ &= \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty} (1-\zeta)^n d\zeta + \ln 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^z (1-\zeta)^n d\zeta + \ln 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n + 2\pi ik, \quad (k \text{ 为整数}) \end{aligned} \quad (5.71)$$

例 5.8 在 $z_0=0$ 的邻域上展开 $f(z)=(1+z)^m$, 其中 m 不是整数。

解: 首先计算泰勒展开的系数:

$$\begin{aligned} f(z) &= (1+z)^m, & f(0) &= 1^m; \\ f'(z) &= m(1+z)^{m-1}, & f'(0) &= m \cdot 1^m; \\ &= \frac{m}{1+z} f(z), \\ f''(z) &= m(m-1)(1+z)^{m-2}, & f''(0) &= m(m-1) \cdot 1^m; \\ &= \frac{m(m-1)}{(1+z)^2} f(z), \\ f^{(3)}(z) &= m(m-1)(m-2)(1+z)^{m-3}, & f^{(3)}(0) &= m(m-1)(m-2) \cdot 1^m. \end{aligned}$$

因此, 根据泰勒展开公式, $(1+z)^m$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的展开式为:

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= 1^m + \frac{m}{1!}1^m z + \frac{m(m-1)}{2!}1^m z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}1^m z^3 + \dots \\ &= 1^m \left\{ 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \dots \right\}.\end{aligned}\quad (5.72)$$

根据达朗贝尔判别法, 右端泰勒级数的收敛半径为 1, 因此:

$$(1+z)^m = 1^m \left\{ 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \dots \right\}, \quad (|z| < 1). \quad (5.73)$$

式中的

$$1^m = (e^{in2\pi})^m = e^{imn2\pi}, \quad (n \text{ 为整数}). \quad (5.74)$$

在(5.73)的多个单值分支中, 若取 $n=0$, 即 $1^m=1$ 。

5.6 奇点

定义 5.2 (奇异 (singular) 函数) 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不是解析的, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处奇异。

定义 5.3 (孤立奇点 (isolated singularity)) 对于函数 $f(z)$, 如果存在某个 $r > 0$, 使得在 $0 < |z - z_0| < r$ 上 $f(z)$ 是解析的, 则奇点 z_0 称为孤立奇点。

例 5.9 函数 $f(z) = e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 处有孤立奇点。

例 5.10 函数 $f(z) = \log(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个奇点, 但由于割线的存在它不是孤立奇点。

例 5.11 函数 $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ 在 $z = 0$ 和 $z = 1/n$ (其中 $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有奇点。 $\pm 1/n$ 处的奇点是孤立的, 但 $z = 0$ 处的奇点不是孤立的。

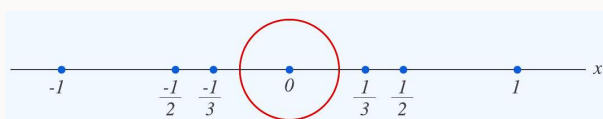


图 55: 只要 n 足够大, 每个 0 的邻域都包含奇点 $1/n$ 。

5.7 解析函数的洛朗展开

一个函数除了可在解析点的邻域（单连通区域）内作泰勒展开外，有时还需要将它在环形区域（多连通区域）展开成幂级数。这时就得到洛朗展开。

定理 5.6 (洛朗 (Laurent) 级数) 假设 $f(z)$ 在环形区域 A 上解析，其中

$$A: r_1 < |z - z_0| < r_2 \quad (5.75)$$

那么， $f(z)$ 可以表示为如下的级数形式：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.76)$$

其中，系数 a_n 和 b_n 的计算公式为：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \end{aligned} \quad (5.77)$$

其中， γ 是任意一个圆 $|w - z_0| = r$ ，其中 $r_1 < r < r_2$ ，并且位于环形区域 A 内。

整个级数称为 f 在 z_0 附近的洛朗级数。级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.78)$$

称为洛朗级数的解析部分或正则部分。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (5.79)$$

称为洛朗级数的奇异部分或主要部分。

注意 由于 $f(z)$ 在 z_0 可能不是解析的（甚至可能未定义），因此我们没有使用导数来求系数的公式。

此外，以下结论成立：

- 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在 $|z - z_0| < r_2$ 的区域内收敛，且收敛于一个解析函数。
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ 在 $|z - z_0| > r_1$ 的区域内收敛，且收敛于一个解析函数。
- 两个级数在环形区域 A 上都收敛，且 $f(z)$ 在该区域内解析。

证明： 设 z 是区域 A 内的一个点。选择圆 C_1 和 C_3 ，使得 z 位于 $C_1 + C_2 - C_3 - C_2$ 内，如图56所示。由于该路径及其内部都包含在区域 A 内，根据 Cauchy 积分公式，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + C_2 - C_3 - C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (5.80)$$

因此

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} -\frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\oint_{C_3} f(w) (w-z_0)^n dw \right) (z-z_0)^{-n-1} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

在最后一步中，我们将指标改为与定理中的指标一致。这里的 b_n 是根据定理中的积分公式定义的。通过上面的推导，我们看到对 z 的要求是 $|z-z_0| > r_1$ ，因此该级数在所有满足此条件的 z 上收敛。

将这两部分公式合并，我们得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1-C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{5.86}$$

最后需要注意的是， a_n 和 b_n 的积分值不依赖于积分圆的具体半径。在区域 A 内的任何圆都能得到相同的结果。我们已经证明了洛朗级数定理中的所有结论，证毕。

通常情况下，积分公式并不是计算洛朗系数的直接方法。相反，我们通常使用各种代数技巧来简化计算。我们将看到，在许多情况下，我们并不需要计算所有的系数，因此，我们将发展一些方法来直接求解所需的特定系数。

例 5.12 求函数

$$f(z) = \frac{z+1}{z} \tag{5.87}$$

在 $z_0 = 0$ 处的洛朗级数，并给出该级数的适用区域。

解：直接计算可得

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} \tag{5.88}$$

这是一个洛朗级数，其在区域 $0 < |z| < \infty$ 上收敛。

例 5.13 求函数

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \tag{5.89}$$

在 $z_0 = i$ 处的洛朗级数，并给出该级数的适用区域。同时，确定其奇异（主要）部分。

解：使用部分分式分解，我们得到：

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i} \tag{5.90}$$

由于 $\frac{1}{z+i}$ 在 $z=i$ 处是解析的，因此它具有泰勒级数展开式。我们可以使用几何级数展开来求解：

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i} \right)^n \tag{5.91}$$

因此，洛朗级数为：

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i} \right)^n \quad (5.92)$$

其中，第一项 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i}$ 是该洛朗级数的奇异（主）部分。该级数的收敛区域为 $0 < |z-i| < 2$ 。

注意 我们也可以考虑 $f(z)$ 在区域 $2 < |z-i| < \infty$ 上的展开，这将导致一个不同的洛朗级数。我们将在后续的例子中进一步讨论这一点。

例 5.14 计算函数

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)} \quad (5.93)$$

在区域 $A: 0 < |z| < 1$ 内，以 $z=0$ 为中心的洛朗级数。

解： 该函数在 $z=0, \pm i$ 处具有孤立奇点。

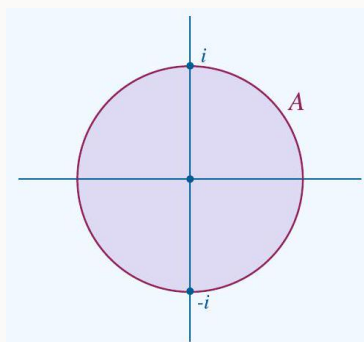


图 57: $f(z)$ 在 $z=0, \pm i$ 处具有奇点。

在 $z=0$ 处，我们可以将 $f(z)$ 展开为：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} (1+z) (1-z^2+z^4-z^6+\dots) \quad (5.94)$$

逐项展开并整理得到：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 + z + z^2 - z^3 - \dots \quad (5.95)$$

注意 洛朗级数的展开形式依赖于所考虑的区域，接下来的例子将进一步说明这一点。

例 5.15 在以下两个区域内，以 $z=0$ 为中心，求函数

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \quad (5.96)$$

的洛朗级数展开：

- (i) 区域 $A_1: 0 < |z| < 1$
- (ii) 区域 $A_2: 1 < |z| < \infty$

解： 对于 (i) 区域 A_1 ：

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \quad (5.97)$$

由于当 $|z| < 1$ 时，几何级数展开成立：

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (5.98)$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots \quad (5.99)$$

对于 (ii) 区域 A_2 ：

由于 $|z| > 1$ ，通常的几何级数展开 $\frac{1}{1-z}$ 在该区域不收敛，因此需要变换形式：

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z(1-1/z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-1/z} \quad (5.100)$$

由于 $|1/z| < 1$ ，我们可以使用几何级数展开：

$$\frac{1}{1-1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \quad (5.101)$$

从而得到：

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \quad (5.102)$$

注意 这个例子表明，洛朗级数的展开形式不仅取决于函数的表达式，还取决于所考虑的区域。

5.8 极点

极点 (Pole) 指的是孤立奇点。假设函数 $f(z)$ 在区域 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析, 并且具有如下的洛朗级数展开:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.103)$$

定义 5.4 (极点) 若洛朗级数中仅有有限个 b_n 不为零, 则称 z_0 为 f 的有限阶极点。具体地, 若存在正整数 k 使得 $b_k \neq 0$ 且对所有 $n > k$, $b_n = 0$, 则称 z_0 为 f 的 k 阶极点。

- 若 z_0 是 1 阶极点, 则称其为 f 的单极点 (simple pole)。
- 若无限多个 b_n 不为零, 则称 z_0 为 f 的本性奇点 (essential singularity) 或无穷阶极点。
- 若所有 b_n 都为零, 则称 z_0 为可去奇点 (removable singularity)。也就是说, 若定义 $f(z_0) = a_0$, 则 f 在圆盘 $|z - z_0| < r$ 内解析。

可去奇点 例如, 若已知 f 在去心圆盘 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析, 则一般而言, 我们认为 f 在 z_0 处存在一个奇点。但如果通过计算洛朗级数发现其没有奇异部分, 则可以通过适当定义 $f(z_0)$ 以扩展 f 的定义到整个圆盘, 从而消除该奇点。

本性奇点 若 $f(z)$ 在 z_0 处是 k 阶极点, 则 $(z - z_0)^k f(z)$ 在 z_0 处解析 (即该点仅是一个可去奇点)。因此, $f(z)$ 仍然可以像解析函数一样处理。然而, 若 z_0 是本性奇点, 则不存在任何代数变换能够将 $f(z)$ 变为 z_0 处的解析函数。

例 5.16 讨论 $\log(z)$ 在 $z = 0$ 处的奇点类型。

解: 函数 $\log(z)$ 在 $z = 0$ 处存在一个奇点。然而, 该奇点不是孤立奇点。因此, $z = 0$ 不能被归类为极点或本性奇点。

例 5.17 计算有理函数

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5} \quad (5.104)$$

的洛朗级数展开, 并确定其极点阶数。

解: 先将分母分解:

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3(1 + z^2)}. \quad (5.105)$$

使用几何级数展开:

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad \text{当 } |z| < 1 \text{ 时收敛。} \quad (5.106)$$

代入展开式:

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}. \quad (5.107)$$

展开后得到:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}. \quad (5.108)$$

由此可见, $z = 0$ 是一个 3 阶极点。

例 5.18 计算函数

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad (5.109)$$

在 $z = i$ 的洛朗级数展开, 并确定其极点阶数。

解: 先使用部分分式展开:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - i} + g(z), \quad (5.110)$$

其中 $g(z)$ 在 $z = i$ 处解析。由此可见, $z = i$ 是一个单极点。

例 5.19 说明函数

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \quad (5.111)$$

在 $z = 0$ 和 $z = 1$ 处均为单极点。

解: 在 $z = 0$ 的邻域内, 我们可以将 $f(z)$ 重新表示为:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z}, \quad \text{其中 } g(z) = \frac{1}{z-1}. \quad (5.112)$$

由于 $g(z)$ 在 $z = 0$ 解析, 因此 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的有限阶极点。此外, 由于 $g(0) \neq 0$, 说明 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 即单极点。

类似地, 在 $z = 1$ 的邻域内, 我们可以将 $f(z)$ 重新表示为:

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-1}, \quad \text{其中 } h(z) = \frac{1}{z}. \quad (5.113)$$

由于 $h(z)$ 在 $z = 1$ 解析, 因此 $z = 1$ 也是 $f(z)$ 的有限阶极点。此外, 由于 $h(1) \neq 0$, 说明 $z = 1$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点, 即单极点。

5.8.1 无穷远点

无穷远点的讨论通常通过变量变换 $z = \frac{1}{t}$ 进行, 即将 $f(z)$ 转换为 $f(1/t)$ 进行分析。根据 $t = 0$ 处的性质, 我们可以对 $z = \infty$ 进行分类:

- 若 $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的极点, 则 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的极点。
- 若 $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的可去奇点, 则 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 (甚至可视为解析点, 在实际函数讨论中通常无需严格区分)。
- 若 $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的本性奇点, 则 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

示例

- 函数 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 在 $z = \infty$ 处具有可去奇点 (或解析点)。
- 函数 $f(z) = 1 + z^2$ 在 $z = \infty$ 处具有二阶极点。
- 函数 $f(z) = e^z, \sin z, \cos z$ 在 $z = \infty$ 处均具有本性奇点。

5.8.2 留数 (Residue)

定义 5.5 (留数) 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处具有孤立奇点，即在区域 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析，并具有洛朗级数展开（即，孤立奇点 z_0 的领域内的洛朗展开）：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.114)$$

其中，洛朗级数中 $\frac{1}{z - z_0}$ 项的系数 b_1 称为 f 在 z_0 处的留数 (**residue**)，记作：

$$\text{Res } f(z_0) \quad \text{或} \quad \text{Res}(f, z_0) \quad \text{或} \quad \text{Res}_{z=z_0} f = b_1 \quad (5.115)$$

留数的重要性 留数在计算围绕孤立奇点的积分时起到了关键作用。若 γ 是围绕 z_0 逆时针方向的简单闭曲线，且 γ 小到完全包含于区域 $|z - z_0| < r$ 内，则：

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1 \quad (5.116)$$

这个结果可以通过逐项积分洛朗级数来证明，其中唯一产生非零积分的项是 $b_1/(z - z_0)$ 。

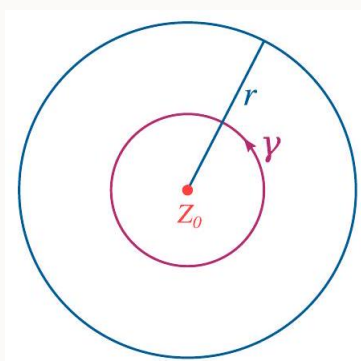


图 58: 曲线 γ 足够小，以至于完全包含在 $|z - z_0| < r$ 内，并围绕 z_0 。

例 5.20 计算函数

$$f(z) = e^{1/(2z)} \quad (5.117)$$

在 $z = 0$ 处的留数。

解： 该函数在 $z = 0$ 处具有孤立奇点，其洛朗级数展开为：

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2(2z)^2} + \dots \quad (5.118)$$

观察该展开式，我们可以直接得到：

$$\text{Res } f(0) = \frac{1}{2} \quad (5.119)$$

6 留数定理及其应用

6.1 极点与零点

我们回顾以下术语：假设 $f(z)$ 在 z_0 处解析，并且可以表示为：

$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots \quad (6.1)$$

其中 $a_n \neq 0$ ，则称 f 在 z_0 处具有 n 阶零点 (zero of order n)。若 $n = 1$ ，则称 z_0 为 f 的单零点 (simple zero)。

假设 f 在 z_0 处具有孤立奇点 (isolated singularity)，并且其洛朗级数表示如下：

$$f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots \quad (6.2)$$

该级数在 $0 < |z - z_0| < R$ 内收敛，且 $b_n \neq 0$ ，则称 f 在 z_0 处具有 n 阶极点 (pole of order n)。若 $n = 1$ ，则称 z_0 为 f 的单极点 (simple pole)。

例 6.1 求解函数 $f(z)$ 的极点与零点：

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^3 (z^2 + 1)} \quad (6.3)$$

该函数在 $z = 0, \pm i$ 处具有孤立奇点，并在 $z = -1$ 处具有零点。我们将证明 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 3 阶极点， $z = \pm i$ 是 1 阶极点，而 $z = -1$ 是 1 阶零点。各个点的分析方法相同。

解： 对于 $z = 0$ ，我们将 $f(z)$ 分解为：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{z + 1}{z^2 + 1} \quad (6.4)$$

设第二项为 $g(z)$ ，由于 $g(z)$ 在 $z = 0$ 处解析且 $g(0) = 1$ ，它可以展开成泰勒级数：

$$g(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 1} = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (6.5)$$

因此， $f(z)$ 可写成：

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \dots \quad (6.6)$$

由此可见， $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 3 阶极点。

对于 $z = i$ ，我们将 $f(z)$ 重写为：

$$f(z) = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{z + 1}{z^3 (z + i)} \quad (6.7)$$

设第二项为 $g(z)$ ，由于 $g(z)$ 在 $z = i$ 处解析，因此它可以展开成泰勒级数：

$$g(z) = \frac{z + 1}{z^3 (z + i)} = a_0 + a_1 (z - i) + a_2 (z - i)^2 + \dots \quad (6.8)$$

其中 $a_0 = g(i) \neq 0$, 因此:

$$f(z) = \frac{a_0}{z-i} + a_1 + a_2(z-i) + \dots \quad (6.9)$$

由此可见, $z = i$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点。

类似的方法可以用于分析 $z = -i$ 和 $z = -1$, 从而得出结论:

- $z = 0$ 是 3 阶极点;
- $z = \pm i$ 是 1 阶极点;
- $z = -1$ 是 1 阶零点。

6.2 全纯函数与亚纯函数

定义 6.1 • 若函数在区域 A 上解析, 则称其在 A 上全纯 (**holomorphic**)。

• 若函数在 A 上除了一组有限阶极点外解析, 则称其在 A 上亚纯 (**meromorphic**)。

例 6.2 设

$$f(z) = \frac{z + z^2 + z^3}{(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)} \quad (6.10)$$

解: 该函数在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯的, 并在 $z = 2, 3, 4, 5$ 处具有单极点。

6.3 留数

本节我们将探讨如何计算留数。

例 6.3 设

$$f(z) = e^{\frac{1}{2z}} = 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2(2z)^2} + \dots \quad (6.11)$$

该函数在 $z = 0$ 处具有孤立奇点。由洛朗级数可知：

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

例 6.4 (i) 设

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z} + 5 + 6z. \quad (6.13)$$

则 f 在 $z = 0$ 处有三阶极点，且

$$\operatorname{Res} f(0) = 4. \quad (6.14)$$

(ii) 设

$$f(z) = \frac{2}{z} + g(z), \quad (6.15)$$

其中 $g(z)$ 在 $z = 0$ 处解析。则 f 在 $z = 0$ 处有一个单极点，且

$$\operatorname{Res} f(0) = 2. \quad (6.16)$$

(iii) 设

$$f(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (6.17)$$

则 f 在 $z = 0$ 处解析，且

$$\operatorname{Res} f(0) = 0. \quad (6.18)$$

(iv) 设

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \quad (6.19)$$

因此， f 在 $z = 0$ 处具有可去奇点，且

$$\operatorname{Res} f(0) = 0. \quad (6.20)$$

例 6.5 设

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad (6.21)$$

求 f 的极点及其留数。

解： 通过部分分式展开，我们得到：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

由此可见, f 在 $z = \pm i$ 处具有极点。我们分别计算它们的留数:

在 $z = i$ 处:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \text{在 } i \text{ 处解析的部分} \quad (6.23)$$

因此, 该极点为单极点, 且

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{1}{2}. \quad (6.24)$$

在 $z = -i$ 处:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \text{在 } -i \text{ 处解析的部分} \quad (6.25)$$

因此, 该极点亦为单极点, 且

$$\operatorname{Res} f(-i) = \frac{1}{2}. \quad (6.26)$$

例 6.6 设

$$f(z) = -\frac{1}{z(1-z)} \quad (6.27)$$

下面是 f 在 $z = 0$ 处的洛朗展开。

解: 在区域 $0 < |z| < 1$ 内:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots). \end{aligned} \quad (6.28)$$

由此可见, $z = 0$ 处是一个单极点, 且

$$\operatorname{Res} f(0) = -1. \quad (6.29)$$

在区域 $1 < |z| < \infty$ 内:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-1/z} \\ &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

尽管该展开式在该区域内有效, 但不能用于计算 $z = 0$ 处的留数。因为留数的定义要求使用 $0 < |z - z_0| < r$ 区域内的洛朗级数。

例 6.7 设

$$f(z) = \log(1+z). \quad (6.31)$$

解: 该函数在 $z = -1$ 处存在奇点, 但该奇点不是孤立奇点, 因此 $z = -1$ 既不是极点, 也没有对应的留数。

6.3.1 单极点的留数

单极点出现得非常频繁，因此我们将详细探讨计算它们的留数的方法。实际上，我们已经看到计算留数的用途，在下一节探讨留数定理时，我们将更加清楚其重要性。

假设 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处具有一个孤立奇点，则可以得到以下性质。

性质 1 若 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗级数形式为

$$\frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (6.32)$$

则 f 在 z_0 处具有一个单极点，并且

$$\operatorname{Res} f(z_0) = b_1. \quad (6.33)$$

性质 2 若

$$g(z) = (z - z_0)f(z) \quad (6.34)$$

在 z_0 处解析，则 z_0 要么是 f 的单极点，要么是可去奇点。在这两种情况下，都有

$$\operatorname{Res} f(z_0) = g(z_0). \quad (6.35)$$

(若 z_0 是可去奇点，则 $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$ 。)

证明： 直接由 f 在 z_0 处的洛朗级数展开式可得结论。

性质 3 若 f 在 z_0 处具有一个单极点，则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.36)$$

该式表明极限存在，并且等于留数。反之，若极限存在，则 z_0 要么是单极点，要么 f 在 z_0 处解析。在这两种情况下，极限均等于留数。

证明： 直接由 f 在 z_0 处的洛朗级数展开式可得结论。

性质 4 若 f 在 z_0 处具有一个单极点，且 $g(z)$ 在 z_0 处解析，则

$$\operatorname{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.37)$$

若 $g(z_0) \neq 0$ ，则

$$\operatorname{Res}(f/g, z_0) = \frac{\operatorname{Res} f(z_0)}{g(z_0)}. \quad (6.38)$$

证明： 由于 z_0 是单极点，可写作

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0). \quad (6.39)$$

由于 g 在 z_0 处解析, 可展开为

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad (6.40)$$

其中 $c_0 = g(z_0)$ 。将两者相乘后, 显然有

$$\operatorname{Res}(fg, z_0) = c_0 b_1 = g(z_0) \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.41)$$

证毕。

对于 f/g , 由于 $1/g$ 在 z_0 处解析, 因此可以利用乘积性质直接得出结论。

性质 5 若 $g(z)$ 在 z_0 处具有一个单零点, 则 $1/g(z)$ 在 z_0 处具有一个单极点, 并且

$$\operatorname{Res}(1/g, z_0) = \frac{1}{g'(z_0)}. \quad (6.42)$$

证明: 证明方法与前述类似。 $g(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开为

$$g(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad (6.43)$$

其中 $a_1 = g'(z_0)$ 。因此

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(z - z_0)} \left(\frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1}(z - z_0) + \dots} \right). \quad (6.44)$$

右侧第二个因子在 z_0 处解析, 并在 z_0 处取值 1。因此, $1/g$ 的洛朗展开式为

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(z - z_0)} (1 + c_1(z - z_0) + \dots). \quad (6.45)$$

显然, 留数为

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{g'(z_0)}. \quad (6.46)$$

证毕。

例 6.8 设

$$f(z) = \frac{2 + z + z^2}{(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)}. \quad (6.47)$$

证明所有极点都是单极点, 并计算其留数。

解: 函数 $f(z)$ 在 $z = 2, 3, 4, 5$ 处具有极点。它们都是孤立奇点。我们以 $z = 2$ 为例, 其他情况类似。两边乘以 $z - 2$ 得到:

$$g(z) = (z - 2)f(z) = \frac{2 + z + z^2}{(z - 3)(z - 4)(z - 5)}. \quad (6.48)$$

函数 $g(z)$ 在 $z = 2$ 处解析, 并且

$$g(2) = -\frac{4}{3}. \quad (6.49)$$

因此, $z = 2$ 处的极点是单极点, 并且

$$\operatorname{Res} f(2) = -\frac{4}{3}. \quad (6.50)$$

例 6.9 设

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)}. \quad (6.51)$$

求所有极点及其留数。

解： 函数 $f(z)$ 的极点是 $\sin(z)$ 的零点，即

$$z = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.52)$$

由于 $\sin(z)$ 的导数为

$$\sin'(n\pi) = \cos(n\pi), \quad (6.53)$$

且 $\cos(n\pi) \neq 0$ ，所以这些零点是单极点。根据前述性质 5，留数计算如下：

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \frac{1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n. \quad (6.54)$$

例 6.10 设

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)(z - 2)^2}. \quad (6.55)$$

确定所有极点，并判断哪些是单极点。

解： 函数 $f(z)$ 的极点位于

$$z = 0, \pm i, 2. \quad (6.56)$$

分析 $z = 0$ 处的极点： 设

$$g(z) = zf(z), \quad (6.57)$$

则

$$g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2)^2}. \quad (6.58)$$

由于 $g(z)$ 在 $z = 0$ 解析且

$$g(0) = \frac{1}{4}, \quad (6.59)$$

因此 $z = 0$ 为单极点，且

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{4}. \quad (6.60)$$

分析 $z = i$ 处的极点： 设

$$g(z) = (z - i)f(z), \quad (6.61)$$

则

$$g(z) = \frac{1}{z(z + i)(z - 2)^2}. \quad (6.62)$$

由于 $g(z)$ 在 $z = i$ 解析，因此 $z = i$ 为单极点，且

$$\operatorname{Res} f(i) = g(i). \quad (6.63)$$

分析 $z = -i$ 处的极点: 该情况与 $z = i$ 的情况类似, 因此 $z = -i$ 也是单极点。

分析 $z = 2$ 处的极点: 设

$$g(z) = (z - 2)f(z), \quad (6.64)$$

则

$$g(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)(z - 2)}. \quad (6.65)$$

由于 $g(z)$ 在 $z = 2$ 不解析, 因此 $z = 2$ 不是单极点 (显然它是一个二阶极点)。

例 6.11 设 $p(z), q(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析, 且满足

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) \neq 0. \quad (6.66)$$

求

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)}. \quad (6.67)$$

解: 由于 $q'(z_0) \neq 0$, 可知 $q(z)$ 在 z_0 处有一个单零点, 因此 $1/q$ 在 z_0 处有一个单极点, 且

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{q}, z_0 \right) = \frac{1}{q'(z_0)}. \quad (6.68)$$

由于 $p(z_0) \neq 0$, 我们得到

$$\operatorname{Res} \left(\frac{p}{q}, z_0 \right) = p(z_0) \operatorname{Res} \left(\frac{1}{q}, z_0 \right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (6.69)$$

有限阶极点的留数计算

对于高阶极点, 我们可以提出与单极点类似的结论, 但相关的公式和计算会更加复杂。其一般原则如下:

定理 6.1 若 $f(z)$ 在 z_0 处具有阶数为 k 的极点, 则函数

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) \quad (6.70)$$

在 z_0 处解析, 且若其展开式为

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (6.71)$$

则 f 在 z_0 处的留数由以下公式给出:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \quad (6.72)$$

证明: 这一结果可通过 g 和 f 的泰勒级数及洛朗级数直接得出。

例 6.12 设

$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^5} \quad (6.73)$$

求 $z = 0$ 处的留数。

解： 我们知道 $\sinh(z)$ 的泰勒级数展开为：

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (6.74)$$

(可以通过 $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ 以及 e^z 的泰勒展开式推导得到。)

因此, $f(z)$ 具有展开式:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!} + \dots \quad (6.75)$$

由此可见 $\operatorname{Res} f(0) = 0$ 。

注意 由于 $f(z)$ 是偶函数, 我们也可以直接由对称性看出其在 $z = 0$ 处的留数为零。

例 6.13 设

$$f(z) = \frac{\sinh(z)e^z}{z^5} \quad (6.76)$$

求 $z = 0$ 处的留数。

解： 很明显, $\operatorname{Res} f(0)$ 即 $\sinh(z)e^z$ 的泰勒展开式中 z^4 项的系数。直接计算:

$$\sinh(z)e^z = \left(z + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \quad (6.77)$$

展开后, 我们找到 z^4 项的系数:

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{1}{3} \quad (6.78)$$

因此

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{3} \quad (6.79)$$

例 6.14 求函数

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)(z - 2)^2} \quad (6.80)$$

在 $z = 2$ 处的留数。

解： 令

$$g(z) = (z - 2)^2 f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)} \quad (6.81)$$

由于 $g(z)$ 在 $z = 2$ 处解析, 因此留数即其泰勒展开式中的 a_1 项, 即 $g'(2)$ 。直接计算得:

$$\operatorname{Res} f(2) = g'(2) = -\frac{13}{100} \quad (6.82)$$

6.3.2 $\cot(z)$

函数 $\cot(z)$ 在数学分析和应用中具有重要作用。这主要是因为它在所有 π 的整数倍处具有单极点，并且在每个极点处的留数均为 1。我们首先证明这一性质。

定理 6.2 设 $f(z) = \cot(z)$ ，则 $f(z)$ 在 $z = n\pi$ (n 为整数) 处具有单极点，并且

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = 1. \quad (6.83)$$

证明： 由定义， $\cot(z)$ 可以表示为

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad (6.84)$$

该函数的极点位于 $\sin(z)$ 的零点，即 $z = n\pi$ 处。由于 $f(z)$ 可表示为分式 p/q ，其中 q 在 z_0 处具有单零点且 $p(z_0) \neq 0$ ，因此可以使用以下留数公式：

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (6.85)$$

在本例中， $p(z) = \cos(z)$ ， $q(z) = \sin(z)$ ，计算其导数：

$$q'(z) = \cos(z). \quad (6.86)$$

于是，

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \frac{\cos(n\pi)}{\cos(n\pi)} = 1. \quad (6.87)$$

证明完毕。

注意 有时我们需要 $\cot(z)$ 的洛朗级数展开的更多项。目前尚无已知的通用公式，但可以使用以下方法计算所需的任意多项。

例 6.15 计算 $\cot(z)$ 在 $z = 0$ 处的洛朗级数展开的前几项。

解： 由于 $\cot(z)$ 在 $z = 0$ 处具有单极点，我们可以设其展开形式为

$$\cot(z) = \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \quad (6.88)$$

同时，我们有

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1 - z^2/2 + z^4/4! - \dots}{z - z^3/3! + z^5/5! - \dots} \quad (6.89)$$

交叉相乘后，我们得到

$$\left(\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (6.90)$$

通过展开并比较 z 的各次幂的系数，我们得到

$$b_1 + a_0z + \left(-\frac{b_1}{3!} + a_1\right)z^2 + \left(-\frac{a_0}{3!} + a_2\right)z^3 + \left(\frac{b_1}{5!} - \frac{a_1}{3!} + a_3\right)z^4 = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!}. \quad (6.91)$$

由此，我们可以求解：

$$\begin{aligned}b_1 &= 1, \quad a_0 = 0, \\ -\frac{b_1}{3!} + a_1 &= -\frac{1}{2!} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}, \\ -\frac{a_0}{3!} + a_2 &= 0 \Rightarrow a_2 = 0, \\ \frac{b_1}{5!} - \frac{a_1}{3!} + a_3 &= \frac{1}{4!} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{45}.\end{aligned}\tag{6.92}$$

由此可见，所有偶次幂项均为零，这与 $\cot(z)$ 为奇函数的性质一致。因此，最终展开式为：

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \dots\tag{6.93}$$

6.4 柯西留数定理

柯西留数定理是复分析中的一个重要定理，它使我们能够系统化先前在围绕奇点的围道积分计算中采用的某些“初步”方法。

定理 6.3 (柯西留数定理) 设有界区域 A 的边界 C 为分段光滑的简单闭合曲线。若除有限个孤立奇点 $b_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ 外，函数 $f(z)$ 在 A 内单值解析，在 $\bar{A}$ 中连续，并且 $f(z)$ 在边界 C 上连续，则沿区域 A 边界正向的积分

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(b_k)$$

证明： 证明基于下图所示的几何构造，其展示了围绕两个极点 z_1 和 z_2 的曲线 C ，右图则通过适当的切割线和小圆圈使得新的围道 $\tilde{C}$ 不包含任何 f 的极点，并确保每个小圆圈仅包含单个极点。

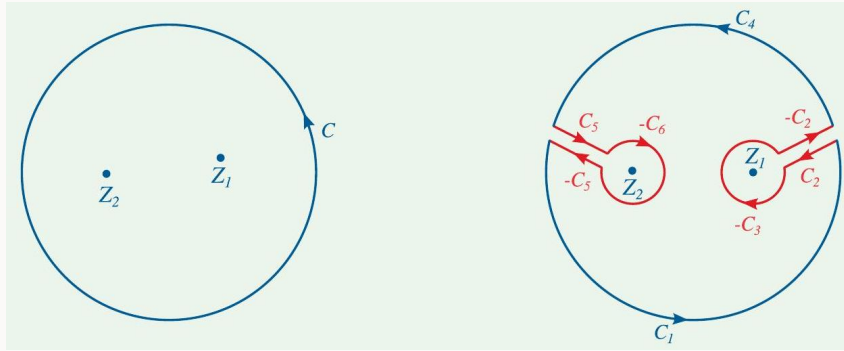


图 59: 柯西留数定理

右侧围道 $\tilde{C}$ 由以下曲线构成：

$$\tilde{C} = C_1 + C_2 - C_3 - C_2 + C_4 + C_5 - C_6 - C_5 \quad (6.94)$$

其中，左侧围道 C 可表示为 $C = C_1 + C_4$ 。由于 $\tilde{C}$ 内部无极点，根据柯西积分定理，有：

$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz = \int_{C_1+C_2-C_3-C_2+C_4+C_5-C_6-C_5} f(z)dz = 0 \quad (6.95)$$

消去重复的 C_2 和 C_5 ，可得：

$$\int_{C_1+C_4} f(z)dz = \int_{C_3+C_6} f(z)dz \quad (6.96)$$

设 $f(z)$ 在 z_1 处的洛朗展开式为：

$$f(z) = \dots + \frac{b_2}{(z-z_1)^2} + \frac{b_1}{z-z_1} + a_0 + a_1(z-z_1) + \dots \quad (6.97)$$

则沿着 C_3 的积分为：

$$\begin{aligned} \int_{C_3} f(z)dz &= \int_{C_3} \left(\dots + \frac{b_2}{(z-z_1)^2} + \frac{b_1}{z-z_1} + a_0 + a_1(z-z_1) + \dots \right) dz \\ &= 2\pi i b_1 \\ &= 2\pi i \text{Res } f(z_1) \end{aligned} \quad (6.98)$$

同理,

$$\int_{C_6} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2) \quad (6.99)$$

结合 $C = C_1 + C_4$, 我们最终得到:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \quad (6.100)$$

这就证明了该定理在包含两个极点的情形下成立。推广至任意个孤立奇点的情形是直接的。

留数定理表明, 在复平面中的任何围道积分的取值, 仅取决于围道内部的少数几个特殊点的性质。

例 6.16 计算下列围道积分

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)} \quad (6.101)$$

在图60中所示的各个围道 C_1, C_2, C_3, C_4 上的积分值。

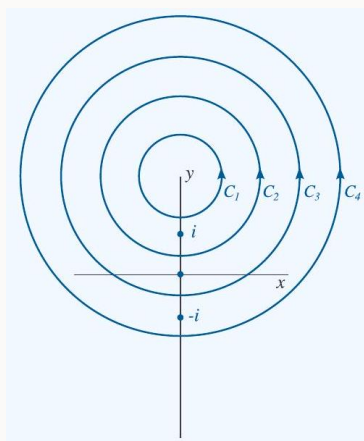


图 60: 围道示意图

解: 函数 $f(z)$ 的极点在 $z = 0, \pm i$ 处。我们使用留数定理来计算每个极点的留数。

在 $z = 0$ 处: 设

$$g(z) = zf(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (6.102)$$

显然, $g(z)$ 在 $z = 0$ 处解析, 因此, $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个单极点, 留数为

$$\operatorname{Res} f(0) = g(0) = 1 \quad (6.103)$$

在 $z = i$ 处: 设

$$g(z) = (z - i)f(z) = \frac{1}{z(z + i)} \quad (6.104)$$

显然, $g(z)$ 在 $z = i$ 处解析, 因此, $f(z)$ 在 $z = i$ 处有一个单极点, 留数为

$$\operatorname{Res} f(i) = g(i) = -\frac{1}{2} \quad (6.105)$$

在 $z = -i$ 处：设

$$g(z) = (z + i)f(z) = \frac{1}{z(z - i)} \quad (6.106)$$

显然， $g(z)$ 在 $z = -i$ 处解析，因此， $f(z)$ 在 $z = -i$ 处有一个单极点，留数为

$$\operatorname{Res} f(-i) = g(-i) = -\frac{1}{2} \quad (6.107)$$

使用留数定理，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= 0 \quad (\text{因为 } f(z) \text{ 在 } C_1 \text{ 内解析}) \\ \int_{C_2} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = -\pi i \\ \int_{C_3} f(z) dz &= 2\pi i [\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(0)] = \pi i \\ \int_{C_4} f(z) dz &= 2\pi i [\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(-i)] = 0 \end{aligned} \quad (6.108)$$

例 6.17 计算下列围道积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz \quad (6.109)$$

解： 设

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)} \quad (6.110)$$

函数 $f(z)$ 的极点在 $z = 0$ 和 $z = 1$ 处，并且该围道包含了这两个极点。

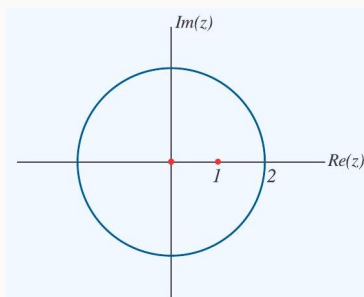


图 61: 包含极点的围道

在 $z = 0$ 处：设

$$g(z) = zf(z) = \frac{5z - 2}{z - 1} \quad (6.111)$$

显然， $g(z)$ 在 $z = 0$ 处解析，因此， $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个单极点，留数为

$$\operatorname{Res} f(0) = g(0) = 2 \quad (6.112)$$

在 $z = 1$ 处: 设

$$g(z) = (z-1)f(z) = \frac{5z-2}{z} \quad (6.113)$$

显然, $g(z)$ 在 $z = 1$ 处解析, 因此, $f(z)$ 在 $z = 1$ 处有一个单极点, 留数为

$$\operatorname{Res} f(1) = g(1) = 3 \quad (6.114)$$

最终, 使用留数定理, 我们得到

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)] = 10\pi i \quad (6.115)$$

例 6.18 计算下列围道积分

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (6.116)$$

解: 设

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad (6.117)$$

函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个孤立的奇点。使用 $\sin(w)$ 的泰勒级数展开, 我们得到

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{6z} + \dots \quad (6.118)$$

因此, $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的留数为

$$\operatorname{Res} f(0) = -\frac{1}{6} \quad (6.119)$$

根据留数定理, 我们得到

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(0) = -\frac{i\pi}{3} \quad (6.120)$$

例 6.19 计算下列围道积分

$$\int_C \frac{1}{z(z-2)^4} dz \quad (6.121)$$

其中, C 为 $|z-2|=1$ 的围道。

解: 设

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4} \quad (6.122)$$

$z = 0$ 处的奇点在积分路径之外, 因此它不会对积分产生贡献。为了使用留数定理, 我们需要计算 f 在 $z = 2$ 处的留数。我们可以通过多种方法来计算留数, 以下是其中一种方法:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} - \frac{(z-2)^3}{8} + \dots \right) \quad (6.123)$$

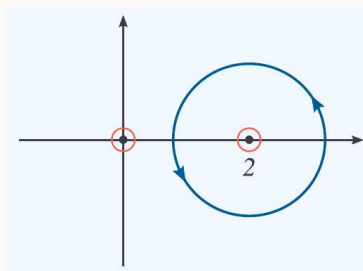


图 62: 极点和围道。

该级数在 $0 < |z - 2| < 2$ 时有效。于是,

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^4} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{2(z-2)^4} - \frac{1}{4(z-2)^3} + \frac{1}{8(z-2)^2} - \frac{1}{16(z-2)} + \cdots \quad (6.124)$$

因此, $f(z)$ 在 $z = 2$ 处的留数为 $\text{Res } f(2) = -\frac{1}{16}$ 。

根据留数定理, 积分为

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res } f(2) = -\frac{\pi i}{8} \quad (6.125)$$

例 6.20 计算下列围道积分

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)} dz \quad (6.126)$$

其中, C 为图示的围道。

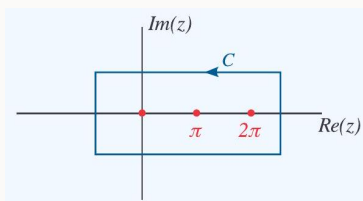


图 63: 围道中的极点。

解: 设

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)} \quad (6.127)$$

f 在围道 C 内有 3 个极点, 分别位于 $z = 0$ 、 $z = \pi$ 和 $z = 2\pi$ 。我们可以通过计算 $(z - z_0) f(z)$ 的极限来求出每个极点的留数。

在 $z = 0$ 处:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(z)} = 1 \quad (6.128)$$

由于该极限存在, $z = 0$ 是一个单极点, 因此

$$\text{Res } f(0) = 1 \quad (6.129)$$

在 $z = \pi$ 处:

$$\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{z - \pi}{\sin(z)} = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos(z)} = -1 \quad (6.130)$$

由于该极限存在, $z = \pi$ 是一个单极点, 因此

$$\text{Res } f(\pi) = -1 \quad (6.131)$$

在 $z = 2\pi$ 处, 使用相同的论证可得

$$\text{Res}(f, 2\pi) = 1 \quad (6.132)$$

根据留数定理,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \pi) + \text{Res}(f, 2\pi)] = 2\pi i \quad (6.133)$$

6.5 无穷远点的留数

无穷远点的留数是一种巧妙的工具, 它有时可以将多个留数的计算简化为单个留数的计算。

假设 f 在区域 C 内解析, 除了有限个奇点之外。令 C 为一个正向方向的曲线, 并且该曲线足够大, 以至于能够包含所有奇点, 如图64所示。

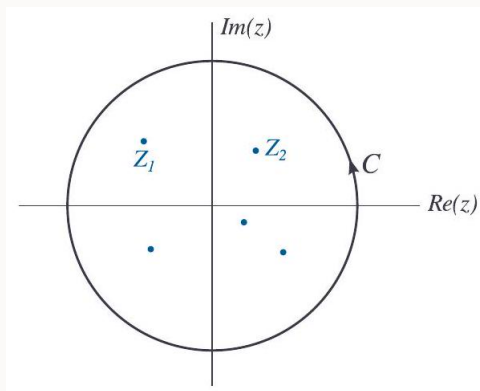


图 64: 所有的极点都在 C 内部。

定义 6.2 我们通过以下方式定义 f 在无穷远点的留数:

$$\text{Res } f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (6.134)$$

首先, 我们需要解释这一概念。简单闭合曲线的内部是沿着曲线方向左侧的区域。曲线 C 是正向的 (逆时针方向), 因此其内部包含了 f 的所有极点。留数定理告诉我们, 曲线 C 上的积分由这些极点的留数决定。

另一方面, 曲线 $-C$ 的内部是曲线 C 外部的区域, 且该区域内没有 f 的极点。如果我们希望留数定理成立, 那么唯一的选择是定义无穷远点的留数。

无穷远点的留数定义假设所有极点都在 C 内部。因此，留数定理可以推出：

$$\operatorname{Res} f(\infty) = - \sum \text{所有极点的留数} \quad (6.135)$$

为了使这一结果更有用，我们需要一种直接计算无穷远点留数的方法。以下定理将为我们提供这种计算方法。

定理 6.4 (9.6.1) 如果 f 在区域 C 内解析，除了有限个奇点，那么

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right) \quad (6.136)$$

证明： 证明仅涉及变量替换：令 $w = \frac{1}{z}$ 。

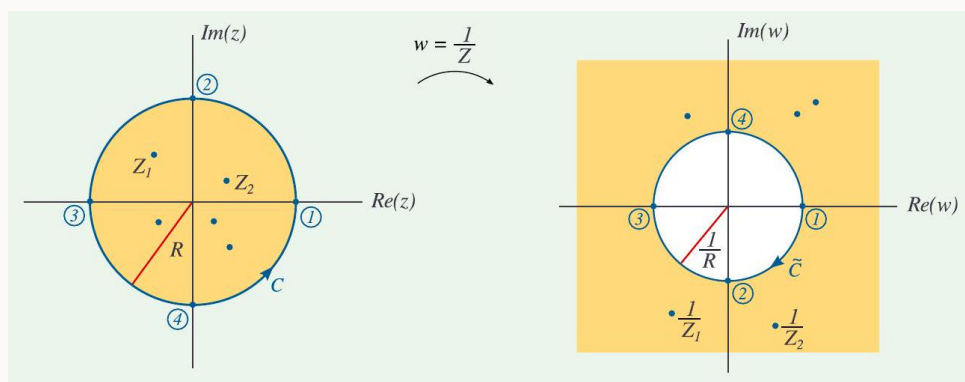


图 65: 变量替换。

首先注意到 $z = \frac{1}{w}$ ，并且

$$dz = -\frac{1}{w^2} dw \quad (6.137)$$

接下来，注意到映射 $w = \frac{1}{z}$ 将正向方向的 z -圆（半径为 R ）映射为负向方向的 w -圆（半径为 $1/R$ ）。（要查看方向，可以跟踪在 z -平面中的圆圈点 1, 2, 3, 4，它们如何映射到 w -平面中的点上。）因此，

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{1}{w^2} dw \quad (6.138)$$

最后，注意到 $z = \frac{1}{w}$ 将所有在圆 C 内的极点映射到圆 $\tilde{C}$ 外的点。因此， $\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right)$ 在圆 $\tilde{C}$ 内的唯一可能的极点是 $w = 0$ 。现在，由于 $\tilde{C}$ 是顺时针方向，留数定理表明

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{1}{w^2} dw = - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right) \quad (6.139)$$

将此结果与上面的方程进行比较，完成证明。

例 6.21 令

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}. \quad (6.140)$$

之前我们通过计算 $z = 0$ 和 $z = 1$ 处的留数，得到了

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = 10\pi i. \quad (6.141)$$

现在我们通过计算无穷远点的一个留数来重新计算这个积分。

解： 首先，我们计算

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{\frac{5}{w} - 2}{\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{w} - 1\right)} = \frac{5 - 2w}{w(1 - w)}. \quad (6.142)$$

我们可以轻松计算得到

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) = -5. \quad (6.143)$$

由于 $|z| = 2$ 包含了 f 的所有奇点，因此我们有

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 10\pi i. \quad (6.144)$$

这与我们之前得到的结果相同！

6.6 留数定理的应用

在之后几节中，我们将使用留数定理来计算某些实数定积分：

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.145)$$

计算此类积分的一般方法如下：

1. 找到一个复解析函数 $g(z)$ ，使其在实轴上等于 $f(x)$ 或与 $f(x)$ 紧密相关，例如当 $f(x) = \cos(x)$ 时，可以选取 $g(z) = e^{iz}$ 。
2. 选取一个封闭的围道 C ，使其包含积分所涉及的实轴部分。
3. 该围道应由多个部分组成，并且应使得我们能够计算除实轴部分外的各段积分。
4. 使用留数定理计算 $\int_C g(z) dz$ 。
5. 结合前述步骤，推导出所求定积分的值。

6.7 无穷积分

本节中的定理将指导我们选择合适的封闭围道 C ，以便计算积分。

第一个定理适用于那些衰减速度快于 $1/z$ 的函数。

定理 6.5 (a) 设 $f(z)$ 在上半平面内有定义，若对充分大的 $|z|$ ，存在常数 $a > 1$ 和 $M > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^a} \quad (6.146)$$

成立，则有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (6.147)$$

其中 C_R 是下图左侧的半圆。

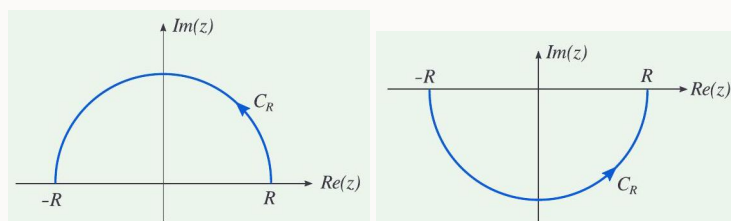


图 6.6: 左图：上半平面的半圆路径 C_R ；右图：下半平面的半圆路径 C_R 。

(b) 若 $f(z)$ 在下半平面内有定义，且满足

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^a} \quad (6.148)$$

则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (6.149)$$

其中 C_R 是上图右侧的半圆。

证明： 我们仅证明 (a)，(b) 的证明类似。使用积分的三角不等式及假设中的估计，对于充分大的 R ，有：

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \int_{C_R} \frac{M}{|z|^a} |dz| \quad (6.150)$$

在极坐标下， C_R 由 $z = Re^{i\theta}$ 表示，其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，于是

$$\int_{C_R} \frac{M}{|z|^a} |dz| = \int_0^\pi \frac{M}{R^a} R d\theta = \frac{M\pi}{R^{a-1}} \quad (6.151)$$

由于 $a > 1$ ，当 $R \rightarrow \infty$ 时，右侧趋于零。因此，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (6.152)$$

注意 接下来的定理适用于那些衰减速率为 $1/z$ 的函数，其陈述和证明需要更多的细致分析。

定理 6.6 (a) 设 $f(z)$ 在上半平面内有定义，若对于充分大的 $|z|$ ，存在常数 $M > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (6.153)$$

成立，则对于 $a > 0$ 有

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_1 + C_2 + C_3} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (6.154)$$

其中 $C_1 + C_2 + C_3$ 是下图左侧的矩形路径。

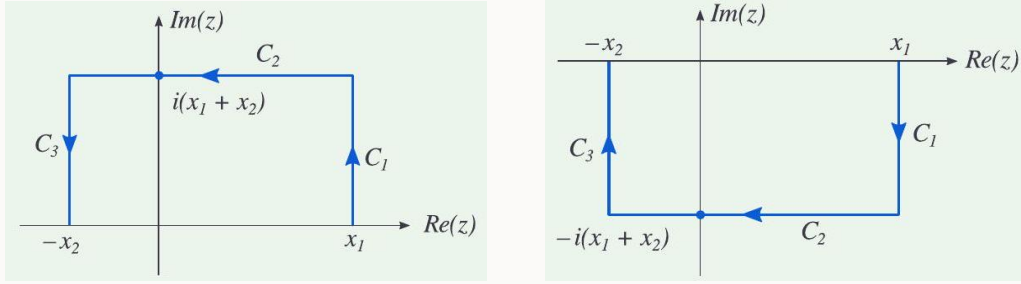


图 67: 左图：上半平面的矩形路径 $C_1 + C_2 + C_3$ ；右图：下半平面的矩形路径 $C_1 + C_2 + C_3$ 。

(b) 类似地，若 $a < 0$ ，则有

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_1 + C_2 + C_3} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (6.155)$$

其中 $C_1 + C_2 + C_3$ 是上图右侧的矩形路径。

注意 与上一个定理不同，这一结果必须包含因子 e^{iaz} 。

证明： (a) 我们首先对 C_1, C_2, C_3 进行参数化：

- $C_1 : \gamma_1(t) = x_1 + it, \quad t \in [0, x_1 + x_2]$
- $C_2 : \gamma_2(t) = t + i(x_1 + x_2), \quad t \in [x_1, -x_2]$
- $C_3 : \gamma_3(t) = -x_2 + it, \quad t \in [x_1 + x_2, 0]$

假设 x_1 和 x_2 充分大，使得在每条路径上

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (6.156)$$

对 C_1 ，有：

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_{C_1} |f(z) e^{iaz}| |dz| \\ &\leq \int_{C_1} \frac{M}{|z|} |e^{iaz}| |dz| \\ &= \int_0^{x_1+x_2} \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + t^2}} e^{-at} dt \\ &\leq \frac{M}{x_1} \int_0^{x_1+x_2} e^{-at} dt \\ &= \frac{M}{x_1} \frac{1 - e^{-a(x_1+x_2)}}{a}. \end{aligned} \quad (6.157)$$

由于 $a > 0$, 很显然当 $x_1, x_2 \rightarrow +\infty$ 时, 该表达式趋于 0。

对 C_2 , 有:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_2} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_{C_2} |f(z) e^{iaz}| |dz| \\
 &\leq \int_{C_2} \frac{M}{|z|} |e^{iaz}| |dz| \\
 &= \int_{-x_2}^{x_1} \frac{M}{\sqrt{t^2 + (x_1 + x_2)^2}} e^{-a(x_1 + x_2)} dt \\
 &\leq \frac{M e^{-a(x_1 + x_2)}}{x_1 + x_2} \int_0^{x_1 + x_2} dt \\
 &\leq M e^{-a(x_1 + x_2)}.
 \end{aligned} \tag{6.158}$$

同样, 显然当 $x_1, x_2 \rightarrow +\infty$ 时, 该表达式趋于 0。

对于 C_3 , 证明与 C_1 的情况相同, 证明从略。

(b) 的证明类似, 需要注意在指数项中保持正确的符号, 以确保指数的衰减性。

例 6.22 计算

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \tag{6.159}$$

解: 令

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} \tag{6.160}$$

显然, 对于大 $|z|$, 有

$$f(z) \approx \frac{1}{z^4}. \tag{6.161}$$

因此, $f(z)$ 满足定理 6.5 的条件。利用下图所示的围道, 并应用留数定理, 我们得到:

$$\int_{C_1 + C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{留数 } f \text{ 在围道内的奇点处}. \tag{6.162}$$

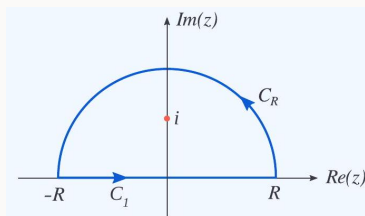


图 68: 围道积分示意图

我们分析上述表达式中的各个积分项:

- $\int_{C_R} f(z) dz$: 由定理 6.5 可知

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0. \tag{6.163}$$

• $\int_{C_1} f(z)dz$: 直接计算可得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = I. \quad (6.164)$$

因此, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 方程变为

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{留数 } f \text{ 在围道内的奇点处.} \quad (6.165)$$

接下来, 我们计算所需的留数。 $f(z)$ 在 $\pm i$ 处有二阶极点, 其中仅 $z = i$ 在围道内, 因此我们计算其在 $z = i$ 处的留数。令

$$g(z) = (z - i)^2 f(z) = \frac{1}{(z + i)^2} \quad (6.166)$$

则

$$\text{Res } f(i) = g'(i) = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}. \quad (6.167)$$

因此, 最终结果为:

$$I = 2\pi i \text{Res } f(i) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.168)$$

例 6.23 计算

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (6.169)$$

解: 令

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^4}. \quad (6.170)$$

我们使用与前例相同的围道:

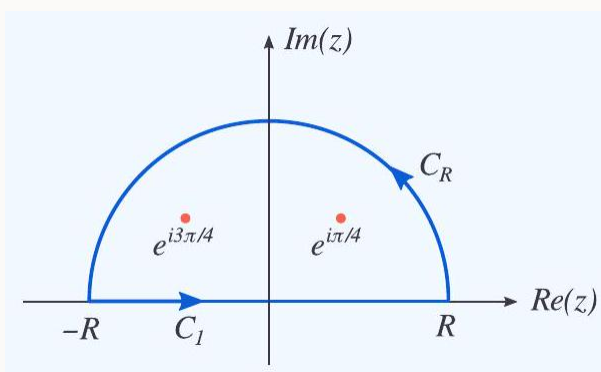


图 69: 围道积分示意图

与前例类似, 有:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad (6.171)$$

以及

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = I. \quad (6.172)$$

因此, 由留数定理可得:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1 + C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{留数 } f \text{ 在围道内的奇点处.} \quad (6.173)$$

$f(z)$ 的所有极点均为单极点, 位于:

$$z = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}. \quad (6.174)$$

其中, 仅 $e^{i\pi/4}$ 和 $e^{i3\pi/4}$ 位于围道内。我们分别计算它们的留数。

对于 $z_1 = e^{i\pi/4}$:

$$\text{Res } f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{1 + z^4} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4}. \quad (6.175)$$

对于 $z_2 = e^{i3\pi/4}$:

$$\text{Res } f(z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z - z_2}{1 + z^4} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}. \quad (6.176)$$

因此,

$$I = 2\pi i (\text{Res } f(z_1) + \text{Res } f(z_2)). \quad (6.177)$$

代入计算:

$$I = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6.178)$$

例 6.24 假设 $b > 0$, 计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + b^2} dx \quad (6.179)$$

解: 首先注意到被积函数是偶函数, 因此

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + b^2} dx. \quad (6.180)$$

需要注意的是 $\cos(z)$ 在上半平面和下半平面都会趋于无穷大, 因此不满足定理6.5的假设。解决的方法是用 e^{ix} 替换 $\cos(x)$, 即

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + b^2} dx, \quad \text{其中 } I = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{I}). \quad (6.181)$$

令

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}. \quad (6.182)$$

对于 $z = x + iy$ 且 $y > 0$, 有

$$|f(z)| = \frac{|e^{i(x+iy)}|}{|z^2 + b^2|} = \frac{e^{-y}}{|z^2 + b^2|}. \quad (6.183)$$

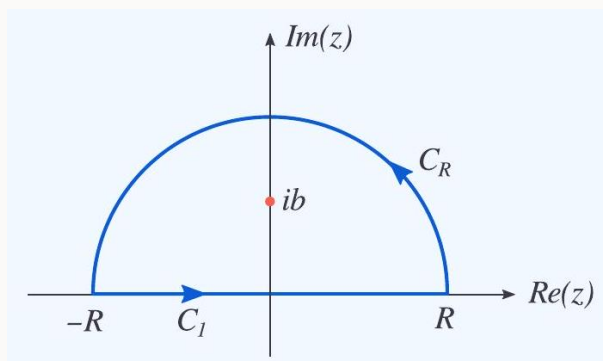


图 70: 围道示意图

由于 $e^{-y} < 1$, $f(z)$ 满足上半平面中的定理 6.5 的假设, 因此可以使用与前例相同的围道 (参见图 70)。

我们有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0, \quad (6.184)$$

以及

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_I} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \tilde{I}. \quad (6.185)$$

因此, 由留数定理可得

$$\tilde{I} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_I + C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{留数 } f \text{ 在围道内的奇点处}. \quad (6.186)$$

$f(z)$ 在 $\pm bi$ 处有两个单极点, 其中只有 bi 在围道内部。计算其留数:

$$\text{Res } f(bi) = \lim_{z \rightarrow bi} (z - bi) \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2} = \frac{e^{-b}}{2bi}. \quad (6.187)$$

因此,

$$\tilde{I} = 2\pi i \text{Res } f(bi) = \frac{\pi e^{-b}}{b}. \quad (6.188)$$

最终,

$$I = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{I}) = \frac{\pi e^{-b}}{2b} \quad (6.189)$$

例 6.25 (Dirichlet 积分) Dirichlet 积分可以利用留数定理轻松计算。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sin y}{y} \quad (6.190)$$

解: 函数 $\frac{\sin y}{y}$, 在 $y = 0$ 处取极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, 可去奇点, 补全在 $y = 0$ 处定义后为复平面上的全纯函数。积分 I 在原点附近的积分路径被变形为围道 C (见图 71, 虚线) 时, 其值不会发生变化。因此,

$$I = \int_C \frac{e^{iz}}{2iz} dz - \int_C \frac{e^{-iz}}{2iz} dz \quad (6.191)$$

其中，第一个积分可以通过在上半平面闭合积分路径来计算，第二个积分则在下半平面闭合积分路径进行计算：

$$I = \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{2iz} dz - \int_{C_2} \frac{e^{-iz}}{2iz} dz \quad (6.192)$$

根据留数定理，最终结果为：

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{0i}}{2i} - 0 \right) = \pi. \quad (6.193)$$

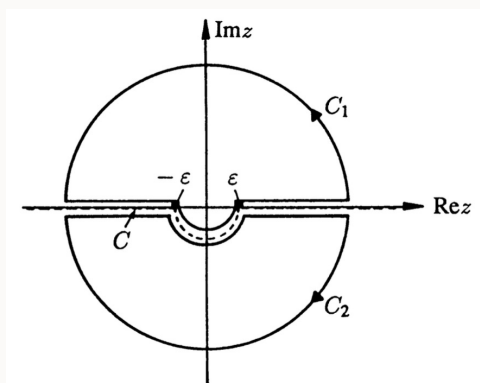


图 71: Dirichlet 积分的积分路径变形

6.8 三角函数的积分

这小节的技巧是利用单位圆上 $z = e^{i\theta}$ 的一些基本性质:

- $e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$ 。
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ 。
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ 。

我们先来看一个例子, 随后将给出一个更一般的定理。

例 6.26 计算积分:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos(\theta)} \quad (6.194)$$

假设 $|a| \neq 1$ 。

解: 注意, 区间 $[0, 2\pi]$ 用于参数化单位圆上的点 $z = e^{i\theta}$ 。我们需要进行如下替换:

$$\cos(\theta) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (6.195)$$

进行变量代换后, 积分变为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos(\theta)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a^2 - 2a \frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{i((1 + a^2)z - a(z^2 + 1))} dz \end{aligned} \quad (6.196)$$

定义

$$f(z) = \frac{1}{i((1 + a^2)z - a(z^2 + 1))} \quad (6.197)$$

根据留数定理:

$$I = 2\pi i \sum \text{留数 } f \text{ 在单位圆内的极点.} \quad (6.198)$$

分母可以因式分解:

$$f(z) = \frac{-1}{ia(z - a)(z - 1/a)} \quad (6.199)$$

极点分别为 a 和 $1/a$, 其中一个在单位圆内, 另一个在单位圆外。具体情况如下:

- 如果 $|a| > 1$, 则 $1/a$ 在单位圆内, 此时

$$\text{Res } f(1/a) = \frac{1}{i(a^2 - 1)} \quad (6.200)$$

- 如果 $|a| < 1$, 则 a 在单位圆内, 此时

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{i(1 - a^2)} \quad (6.201)$$

最终积分结果为：

$$I = \begin{cases} \frac{2\pi}{a^2-1} & \text{若 } |a| > 1 \\ \frac{2\pi}{1-a^2} & \text{若 } |a| < 1 \end{cases} \quad (6.202)$$

定理 6.7 假设 $R(x, y)$ 是一个有理函数，并且在单位圆

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (6.203)$$

上没有极点，则定义函数

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) \quad (6.204)$$

则有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = 2\pi i \sum f \text{ 在 } |z| = 1 \text{ 内的留数} \quad (6.205)$$

证明： 我们使用与例子相同的变量替换，因此

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \quad (6.206)$$

假设条件保证 f 在 $|z| = 1$ 上没有极点，因此根据留数定理，结论成立。

6.9 包含割线的积分

例 6.27 计算

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx \quad (6.207)$$

解： 令

$$f(x) = \frac{x^{1/3}}{1+x^2} \quad (6.208)$$

由于该函数渐近行为类似于 $x^{-5/3}$ ，因此该积分是绝对收敛的。作为复变函数

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2} \quad (6.209)$$

需要在正实轴上引入割线，使其在整个定义区域内解析。

如图 72 所示，我们选择如下的割线，并使用围道 $C_1 + C_R - C_2 - C_r$

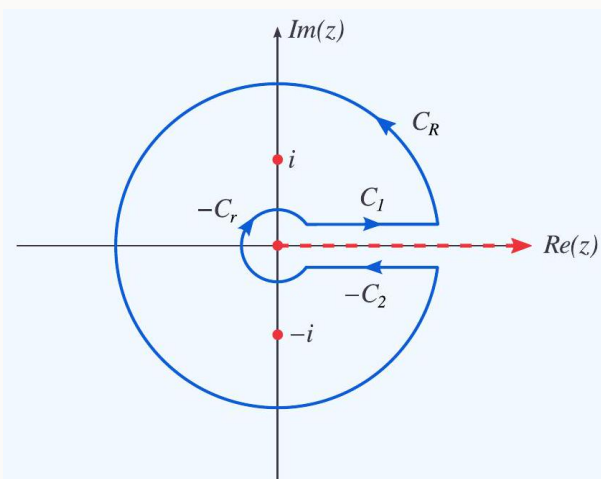


图 72: 围绕割线的围道：内圈半径 r ，外圈半径 R 。

其中我们为每个部分选取合适的符号，以便积分的参数化方式自然。注意， r 取足够小，使得 C_1 和 C_2 实际上位于 x -轴的两侧，而由于它们在割线的相对两侧，有

$$\int_{C_1 - C_2} f(z) dz \neq 0 \quad (6.210)$$

在 C_R 上：根据定理 6.5，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (6.211)$$

在 C_r 上：假设 $r < 1/2$ ，此外令 $|z| = r$ ，因此

$$|f(z)| = \frac{|z^{1/3}|}{|1+z^2|} \leq \frac{r^{1/3}}{1-r^2} \leq \frac{(1/2)^{1/3}}{3/4} \quad (6.212)$$

令上式右端为 M ，则对于足够小的 r ，有 $|f(z)| < M$ ，从而

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} M r d\theta = 2\pi M r \quad (6.213)$$

显然, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 该积分趋于零。

在 C_1 上:

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^\infty f(x) dx = I \quad (6.214)$$

在 C_2 上: 由于 $\theta = 2\pi$, 因此 $z^{1/3} = e^{i2\pi/3}|z|^{1/3}$, 从而

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = e^{i2\pi/3} \int_0^\infty f(x) dx = e^{i2\pi/3} I \quad (6.215)$$

计算留数: $f(z)$ 在 $\pm i$ 处有极点。由留数定理,

$$\int_{C_1+C_R-C_2-C_r} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res } f(i) + \text{Res } f(-i)) \quad (6.216)$$

取极限 $r \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$, 由前述分析,

$$(1 - e^{i2\pi/3}) I = 2\pi i (\text{Res } f(i) + \text{Res } f(-i)) \quad (6.217)$$

计算留数: 选定 $z^{1/3}$ 的分支, 计算

$$\text{Res } f(-i) = \frac{(-i)^{1/3}}{-2i} = \frac{(e^{i3\pi/2})^{1/3}}{2e^{i3\pi/2}} = \frac{e^{-i\pi}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (6.218)$$

$$\text{Res } f(i) = \frac{i^{1/3}}{2i} = \frac{e^{i\pi/6}}{2e^{i\pi/2}} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2} \quad (6.219)$$

整理计算,

$$(1 - e^{i2\pi/3}) I = 2\pi i \cdot \frac{-1 + e^{-i\pi/3}}{2} = \pi i (-1 + 1/2 - i\sqrt{3}/2) = -\pi i e^{i\pi/3} \quad (6.220)$$

$$I = \frac{-\pi i e^{i\pi/3}}{1 - e^{i2\pi/3}} = \frac{\pi i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi/2}{(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})/2i} = \frac{\pi/2}{\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (6.221)$$

注意: 结果是实数, 这与我们的预期一致。

例 6.28 计算

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (6.222)$$

解: 令

$$f(z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} \quad (6.223)$$

首先, 我们证明积分

$$\int_1^\infty f(x) dx \quad (6.224)$$

是绝对收敛的。我们将其拆分为两个部分：

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (6.225)$$

第一个积分可以重写为：

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{x-1} \Big|_1^2 \quad (6.226)$$

这表明第一个积分是绝对收敛的。此外，函数 $f(x)$ 在无穷远处的渐近行为类似于 $1/x^2$ ，因此第二个积分也是绝对收敛的。综上所述，原始积分是绝对收敛的。

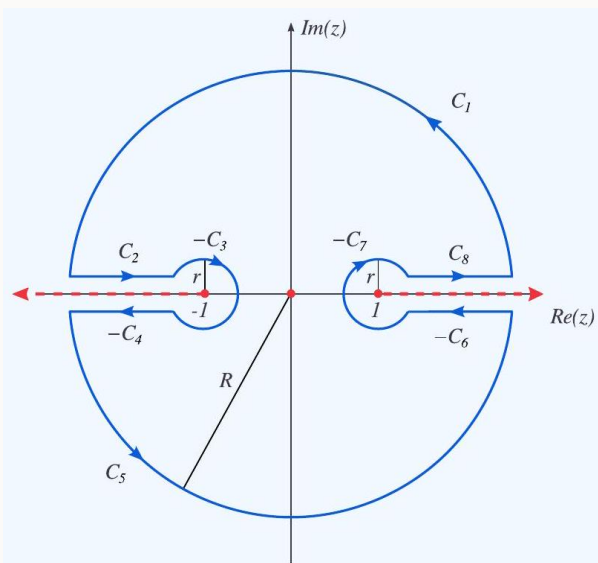


图 73: 围道选择

我们使用围道（见图 73），其中假设大圆的半径为 R ，小圆的半径为 r 。在复平面中去除了 $[1, \infty)$ 和 $(-\infty, -1]$ 的割线。

计算留数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有唯一的极点，计算其留数：

$$\text{Res } f(0) = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = -i \quad (6.227)$$

根据留数定理，

$$\int_{C_1+C_2-C_3-C_4+C_5-C_6-C_7+C_8} f(z)dz = 2\pi i \text{Res } f(0) = 2\pi \quad (6.228)$$

计算围道各部分的积分极限

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_5} f(z)dz = 0 \quad (6.229)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_3} f(z)dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_7} f(z)dz = 0 \quad (6.230)$$

此外，

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_2} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{-C_4} f(z)dz \quad (6.231)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{-C_6} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_8} f(z) dz = I \quad (6.232)$$

利用这些极限，可以得到：

$$4I = 2\pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \quad (6.233)$$

验证各极限 对于 C_1 和 C_5 ，可以利用定理6.5，由于：

$$|f(z)| \approx 1/|z|^{3/2} \quad (6.234)$$

对于 C_3 ，假设 r 足够小，则有

$$z = -1 + re^{i\theta} \quad (6.235)$$

于是

$$|f(z)| = \frac{1}{|z\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}|} = \frac{1}{|-1 + re^{i\theta}| \sqrt{|-2 + re^{i\theta}|} \sqrt{r}} \leq \frac{M}{\sqrt{r}} \quad (6.236)$$

其中选取 M 满足

$$\frac{1}{|-1 + re^{i\theta}| \sqrt{|-2 + re^{i\theta}|}} \quad (6.237)$$

因此

$$\left| \int_{C_3} f(z) dz \right| \leq \int_{C_3} \frac{M}{\sqrt{r}} |dz| \leq \frac{M}{\sqrt{r}} \cdot 2\pi r = 2\pi M \sqrt{r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (6.238)$$

对 C_7 类似处理。

计算实轴部分 C_8 的参数化形式为：

$$z = x + i\epsilon, \quad x \in [1, \infty) \quad (6.239)$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0^+$ ，因此

$$\arg(z^2 - 1) \approx 0, \quad f(z) \approx f(x) \quad (6.240)$$

可得

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_8} f(z) dz = \int_1^\infty f(x) dx = I \quad (6.241)$$

C_6 的参数化形式为：

$$z = x - i\epsilon, \quad x \in (\infty, 1] \quad (6.242)$$

于是

$$\arg(z^2 - 1) \approx 2\pi, \quad \sqrt{z^2 - 1} \approx -\sqrt{x^2 - 1} \quad (6.243)$$

因此

$$f(z) \approx f(x) \quad (6.244)$$

从而

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_2} f(z) dz = \int_\infty^1 f(x) (-dx) = \int_1^\infty f(x) dx = I \quad (6.245)$$

对 $-C_4$ 类似处理。

6.10 柯西主值

例 6.29 计算

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (6.246)$$

此积分不是绝对收敛的，但它是条件收敛的。

例如可以定义

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (6.247)$$

解： 首先注意到， $\sin(x)/x$ 是偶函数，因此

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (6.248)$$

接下来，为了避免 $\sin(z)$ 在上半平面和下半平面都趋于无穷大的问题，我们用指数函数替换被积函数：

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \quad (6.249)$$

此时，问题的关键在于积分的被积函数在 $z = 0$ 处存在极点，导致积分不收敛。此外，在尝试使用围道积分方法时，我们不能选择包含 $z = 0$ 的围道。这正是定义柯西主值 (principal value) 的动机，我们将在后续内容中继续讨论该例子。

定义 6.3 (柯西主值) 假设函数 $f(x)$ 在实数轴上除了 x_1 外连续，则定义其柯西主值为：

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty, r_1 \rightarrow 0} \int_{-R}^{x_1 - r_1} f(x) dx + \int_{x_1 + r_1}^R f(x) dx. \quad (6.250)$$

上述定义的前提是该极限收敛。需要注意的是，定义中积分区间在 x_1 上下及无穷远处均是对称的。

当然，如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (6.251)$$

收敛，则其主值也收敛，且两者取值相同。我们可以进一步推广该定义至以下情况：

1. 如果 $f(x)$ 在整个实轴上连续，则其主值积分定义为：

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (6.252)$$

2. 如果 $f(x)$ 在多个点 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ 处不连续，则其主值积分定义为：

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim \int_{-R}^{x_1 - r_1} f(x) dx + \int_{x_1 + r_1}^{x_2 - r_2} f(x) dx + \int_{x_2 + r_2}^{x_3 - r_3} f(x) dx + \dots + \int_{x_n + r_n}^R f(x) dx, \quad (6.253)$$

积分区间如图 74 所示，其中极限是 $R \rightarrow \infty$ 以及所有 $r_k \rightarrow 0$ 。



图 74: 柯西主值积分的积分区间在不连续点 x_k 及无穷远处对称

注意 接下来的例子将展示, 在某些情况下, 柯西主值积分可能收敛, 而原始积分不收敛。但反之绝不会成立。

例 6.30 如果 $f(x)$ 在 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 处存在不连续点, 且积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 收敛, 则柯西主值积分 $\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 也收敛。

解: 该命题的证明主要依赖于对积分收敛性的理解。积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 收敛意味着以下各个极限均收敛:

$$\begin{aligned} & \lim_{R_1 \rightarrow \infty, a_1 \rightarrow 0} \int_{-R_1}^{x_1 - a_1} f(x)dx, \\ & \lim_{b_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 0} \int_{x_1 + b_1}^{x_2 - a_2} f(x)dx, \\ & \vdots \\ & \lim_{R_2 \rightarrow \infty, b_n \rightarrow 0} \int_{x_n + b_n}^{R_2} f(x)dx. \end{aligned} \quad (6.254)$$

这里, 并没有对称性的要求, 例如 R_1 和 R_2 是完全独立的, 同样 a_1 和 b_1 也是独立的。

另一方面, 柯西主值积分的收敛性意味着以下极限的收敛性:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim \int_{-R}^{x_1 - r_1} f(x)dx + \int_{x_1 + r_1}^{x_2 - r_2} + \int_{x_2 + r_2}^{x_3 - r_3} + \dots \int_{x_n + r_n}^R f(x)dx. \quad (6.255)$$

其中极限是取 $R \rightarrow \infty$ 以及所有 $r_k \rightarrow 0$ 。此时, 积分的上下限具有对称性, 例如, 在等式 (1) 中 a_1 和 b_1 被统一替换为 r_1 , 以此类推。

显然, 如果等式 (6.254) 中的极限收敛, 则等式 (6.255) 中的极限也必然收敛, 从而证明了命题。

例 6.31 考虑积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{以及} \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx. \quad (6.256)$$

解: 第一个积分是发散的。计算:

$$\int_{-R_1}^{-r_1} \frac{1}{x} dx + \int_{r_2}^{R_2} \frac{1}{x} dx = \ln(r_1) - \ln(R_1) + \ln(R_2) - \ln(r_2). \quad (6.257)$$

当 $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ 且 $r_1, r_2 \rightarrow 0$ 时, 该表达式显然趋向于无穷大, 因此积分发散。

另一方面, 考虑对称的柯西主值积分:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{1}{x} dx + \int_r^R \frac{1}{x} dx \right). \quad (6.258)$$

计算得:

$$\ln(r) - \ln(R) + \ln(R) - \ln(r) = 0. \quad (6.259)$$

因此，该极限收敛到 0。

注意 之后我们会看到，柯西主值在围绕某些点进行半圆积分时会自然地出现。本节的计算为后续章节做准备。

6.11 圆弧积分

定理 6.8 假设 $f(z)$ 在 z_0 处具有一个单极点。令 C_r 为以 z_0 为中心、半径为 r 的半圆路径，其参数方程为 $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ，其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。则有：

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.260)$$

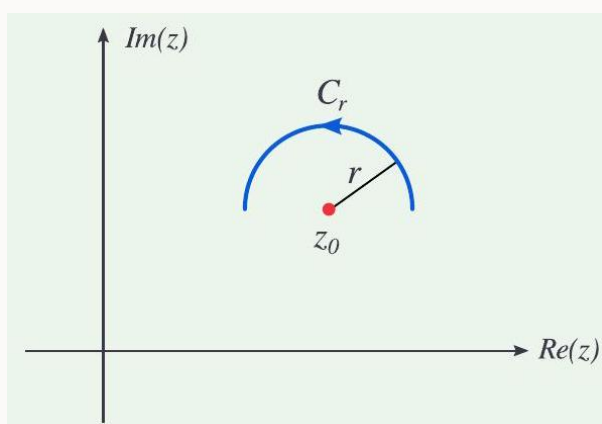


图 75: 围绕 z_0 的小半圆 C_r 。

证明： 由于我们取极限 $r \rightarrow 0$ ，可以假设 r 足够小，使得 $f(z)$ 在以 z_0 为中心、半径为 r 的去心圆盘内具有洛朗展开式。由于 z_0 处的极点是单极点，因此 $f(z)$ 具有形式：

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad \text{其中 } 0 < |z - z_0| \leq r. \quad (6.261)$$

于是，对 C_r 进行积分：

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_0^\pi f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta. \quad (6.262)$$

将 $f(z)$ 代入展开：

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_0^\pi \left(b_1 i + a_0 i r e^{i\theta} + a_1 i r^2 e^{i2\theta} + \dots \right) d\theta. \quad (6.263)$$

其中 b_1 项的积分为：

$$\int_0^\pi b_1 i d\theta = \pi i b_1. \quad (6.264)$$

其余所有项均含有 r 的正幂次，显然当 $r \rightarrow 0$ 时，这些项的积分均趋于 0，因此得到：

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i b_1 = \pi i \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.265)$$

证毕。

注意 如果 z_0 处的极点不是单极点，则定理不成立，并且极限 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz$ 可能不存在。同样的证明方法可以得出一个稍微更一般的结论。

定理 6.9 假设 $f(z)$ 在 z_0 处具有一个单极点。令 C_r 为以 z_0 为中心、半径为 r 的圆弧，其参数方程为：

$$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha. \quad (6.266)$$

则有：

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \alpha i \operatorname{Res} f(z_0). \quad (6.267)$$

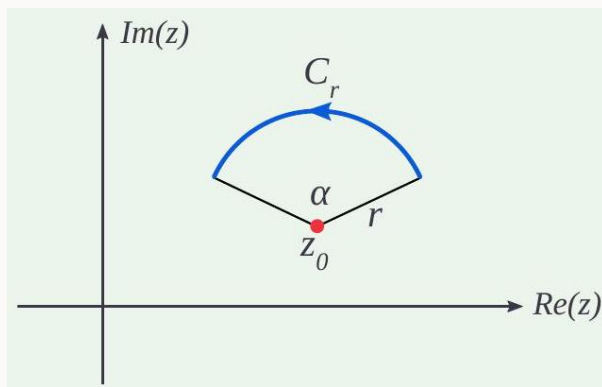


图 76: 围绕 z_0 的小圆弧 C_r 。

例 6.32 之前我们在例 6.29 中定义了柯西主值。现在，我们利用主值计算

$$\tilde{I} = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (6.268)$$

解： 我们使用图 77 所示的围道，该围道包含了围绕 $z = 0$ 的小半圆。由于围道内部没有极点，留数定理给出

$$\int_{C_1 - C_r + C_2 + C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (6.269)$$

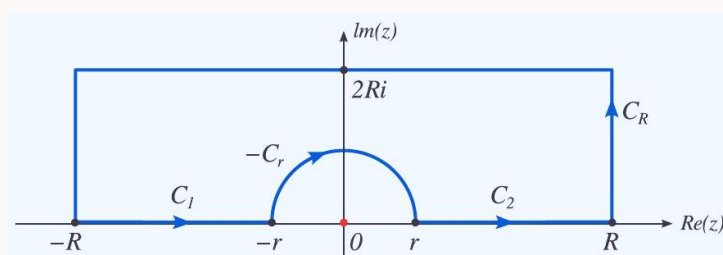


图 77: 包含小半圆的围道。

接下来，我们将围道积分拆分为若干部分，

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_1 + C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \tilde{I}. \quad (6.270)$$

由定理 6.6 可以得到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (6.271)$$

而定理6.8给出

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i \operatorname{Res} f(0) = \pi i. \quad (6.272)$$

综合上述结果，我们得到

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_1 - C_r + C_2 + C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \tilde{I} - \pi i = 0, \quad (6.273)$$

因此 $\tilde{I} = \pi i$ 。

回顾例6.29，我们计算的积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (6.274)$$

满足

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\tilde{I}) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.275)$$

注意 I 是一个条件收敛的积分，而 $\tilde{I}$ 仅以柯西主值的形式存在。由于 I 是一个收敛的积分，我们知道计算柯西主值的方式足以给出收敛积分的值。

例 6.33 考虑如下积分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - i\delta}, \quad (6.276)$$

其中 $\delta > 0$ 是无穷小量， $f(z)$ 是在实轴附近的一条带状区域内解析的函数。

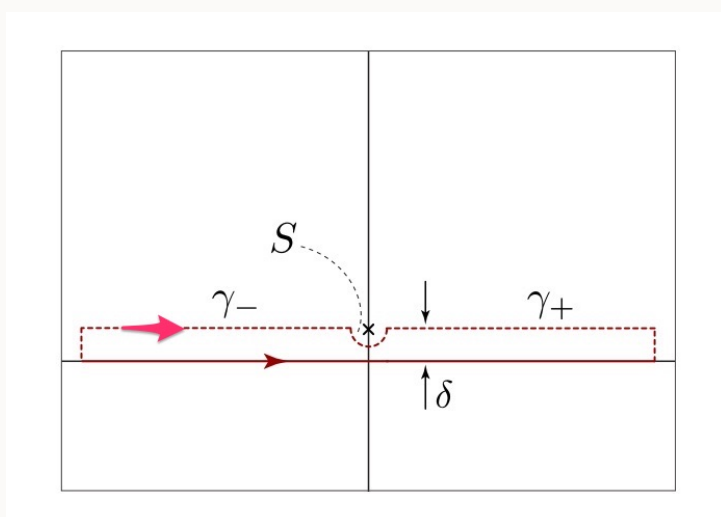


图 78: 例6.33 中的积分路径。

函数 $\frac{1}{z - i\delta}$ 在 $z = i\delta$ 处有一单极点，如图 78 图所示。我们沿实轴闭合积分路径形成一个闭合环路，在解析区域内对解析函数进行积分，其结果为零。因此（容易证明 $\delta \rightarrow 0$ 证明垂直路径贡献为 0）：

$$0 = \int_{\mathbb{R}} dz \frac{f(z)}{z - i\delta} - \int_{\gamma_- + S + \gamma_+} dz \frac{f(z)}{z - i\delta} = I - \int_{\gamma_- + S + \gamma_+} dz \frac{f(z)}{z - i\delta}, \quad (6.277)$$

其中积分路径为：

- $\gamma_- : t + i\delta, t < -\epsilon$
- $\gamma_+ : t + i\delta, t > \epsilon$
- S 是绕 $z = i\delta$ 的半圆, 参数化为 $z = i\delta + \epsilon e^{it}, t \in [\pi, 2\pi]$

令 $0 < \epsilon < \delta \ll 1$, 代入各条路径得:

$$\int_{\gamma_-} dz \frac{f(z)}{z - i\delta} = \int_{-\infty}^{-\epsilon} dt \frac{f(t + i\delta)}{t} \simeq \int_{-\infty}^{-\epsilon} dt \frac{f(t)}{t}, \quad (6.278)$$

$$\int_{\gamma_+} dz \frac{f(z)}{z - i\delta} = \int_{\epsilon}^{\infty} dt \frac{f(t + i\delta)}{t} \simeq \int_{\epsilon}^{\infty} dt \frac{f(t)}{t}, \quad (6.279)$$

$$\int_S dz \frac{f(z)}{z - i\delta} = \int_{\pi}^{2\pi} dt (i\epsilon e^{it}) \frac{f(i\delta - \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} \simeq i\pi f(0). \quad (6.280)$$

因此,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - i\delta} = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} + i\pi f(0), \quad (6.281)$$

其中主值积分定义为:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} g(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} g(x) dx \right). \quad (6.282)$$

我们也常写成符号表达式:

$$\frac{1}{x - i\delta} = \text{p.v.} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x), \quad (6.283)$$

但需注意此式仅在积分符号下成立, 且取极限 $\delta \rightarrow 0$ 的意义下。

例如当 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 时:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x - i\delta} = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{1+x^2} dx = i\pi. \quad (6.284)$$

主值积分部分由于被积函数关于 $x \leftrightarrow -x$ 为奇函数而为零。

7 通过积分和级数定义的实函数回顾

本章回顾若干通过积分和级数定义的实函数，下章将介绍解析延拓的概念，以及复数函数。

7.1 通过积分定义的函数

通过积分定义函数是一种便捷的方式。例如被积函数或积分的上下限包含参数，那么这些参数可以视为函数的自变量，从而使积分本身成为这些参数的函数。在本节中，我们列出了一些通常通过积分定义的重要函数。

7.1.1 伽马函数

考虑以下积分定义：

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (7.1)$$

其中 $x > 0$ 为实数。对上述方程进行分部积分，令 $u = t^{x-1}$ ， $dv = e^{-t} dt = -d(e^{-t})$ ，则有：

$$\Gamma(x) = \underbrace{t^{x-1} [-e^{-t}] \Big|_0^{\infty}}_{=0, \ x>1} + (x-1) \underbrace{\int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt}_{=\Gamma(x-1)} \quad (7.2)$$

因此，可以得到递推关系：

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (7.3)$$

特别地，当 x 为正整数 n 时，递推关系反复应用可得：

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!, \end{aligned} \quad (7.4)$$

其中 $\Gamma(1) = 1$ 可由上式直接验证。因此，可得：

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{当 } n \text{ 为正整数} \quad (7.5)$$

注意 将递推关系变形为 $\Gamma(x-1) = \Gamma(x)/(x-1)$ ，当 $x \rightarrow 1$ 时，

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Gamma(x)}{x-1} \rightarrow \infty \quad (7.6)$$

由于 $\Gamma(1) = 1$ ，因此 $\Gamma(0) = \infty$ 。类似地，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x)}{x-1} \rightarrow \frac{\Gamma(0)}{-1} \rightarrow \infty \quad (7.7)$$

即 $\Gamma(-1) = \infty$ 。由此可见， $\Gamma(n) = \infty$ 对于所有非正整数 n 均成立，即， $\Gamma(x)$ 在这些点上未定义。

定义 7.1 由以下方程定义的函数称为伽马函数 (Gamma function)：

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (7.8)$$

由于其满足以下关系：

$$\Gamma(x+1) = x!, \quad \text{对任意实数 } x \quad (7.9)$$

因此，伽马函数是对阶乘的推广，使其适用于非整数值。我们有时将 Γ 称为阶乘函数 (factorial function)。

注意 伽马函数在除零和负整数以外的所有实数 x 处均有定义。当 x 取零或负整数时, $\Gamma(x)$ 发散。

7.1.2 Beta 函数

在某些应用中, 贝塔函数 (Beta function) 会出现。考虑伽马函数的乘积:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dtds \quad (7.10)$$

引入新变量 $u = t + s$ 并使用它来改写关于 s 的积分。由于 s 和 t 的下限均为 0, 故 u 的积分下限也为 0。同时, 由于 s 和 t 均为正数, 且其和为 u , 因此 t 的上限不能超过 u 。因此, 我们可以写出:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du \int_0^u dt t^{x-1}(u-t)^{y-1}e^{-u} \quad (7.11)$$

现在引入另一个变量 w , 使其满足 $t = uw$ 。在对 t 积分时, u 视为常数, 因此有 $dt = udw$, 且 w 的积分范围为 0 到 1。于是, 我们可以改写积分为:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \underbrace{\int_0^\infty du e^{-u}u^{x+y-1}}_{=\Gamma(x+y)} \int_0^1 dw w^{x-1}(1-w)^{y-1} \quad (7.12)$$

定义 7.2 贝塔函数 (Beta Function) 定义如下:

$$B(x, y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dt t^{x-1}(1-t)^{y-1} \quad (7.13)$$

另一种表示形式 通过变量替换 $t = \sin^2 \theta$, 我们可以得到贝塔函数的另一种表达形式。由于

$$dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad 1-t = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \quad (7.14)$$

且积分限变为 0 和 $\pi/2$, 我们有

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1}(\cos \theta)^{2y-1}d\theta \quad (7.15)$$

7.1.3 误差函数 (Error Function)

误差函数 (Error function) 在统计学中被广泛使用, 其定义如下:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (7.16)$$

性质 误差函数具有如下重要性质:

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad (7.17)$$

7.1.4 椭圆函数 (Elliptic Functions)

在三维笛卡尔坐标系下, 参数方程表示的曲线

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (7.18)$$

其微分弧长 dl 为:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \quad (7.19)$$

因此, 从曲线的起点 $(f(t_1), g(t_1), h(t_1))$ 到终点 $(f(t_2), g(t_2), h(t_2))$ 的总弧长 L 可由下式给出:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \quad (7.20)$$

许多曲线的弧长, 包括一些看似复杂的曲线, 可以通过方程 7.20 解析求解。然而, 计算一个看似简单的曲线——椭圆的周长, 却是不可能的! 让我们尝试计算椭圆的周长, 看看会得到什么结果。

例 7.1 (椭圆周长的计算) 椭圆的参数方程 (椭圆位于 xy -平面, 长轴和短轴分别为 a 和 b) 可表示为:

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (7.21)$$

将这些参数方程代入方程 7.20, 得到:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a \cos t]^2 + [-b \sin t]^2 + [0]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \end{aligned} \quad (7.22)$$

其中, $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ 。这个看似简单的积分无法用常规积分技巧求解。因此 19 世纪的数学家研究该积分及其相关积分, 将其作为独立的函数来研究。

定义 7.3 第一类椭圆积分定义为:

$$F(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (7.23)$$

其中, F 是一个包含两个变量的函数, 因为积分中涉及两个参数: 一个出现在被积函数中, 另一个作为积分上限。

定义 7.4 第二类椭圆积分定义为:

$$E(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (7.24)$$

第二类椭圆积分可解释为椭圆部分弧长的计算。椭圆的周长 L (长半轴 a , 短半轴 b) 可表示为:

$$L = aE(2\pi, k) \quad \text{其中} \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (7.25)$$

7.2 通过级数定义的函数

微分方程广泛应用于物理学的各个领域，从行星绕太阳的运动，到绳索或鼓面上的驻波，再到导体的电学特性以及电磁场的行为等。由于迫切要求解这些微分方程，十八世纪末至十九世纪初的许多数学家集中研究了一些特定的微分方程。研究发现，描述自然界的微分方程往往会引入新的特殊函数。

求解这些微分方程的最常见方法是：假设解具有幂级数的形式，将其代入微分方程，并通过幂级数展开式的恒等性求解未知系数。这种方法极为强大，我们将在后续章节中详细探讨。在本章中，我们先介绍一些通过幂级数表示的特定微分方程的解（函数）。

7.2.1 高斯超几何函数

在研究二阶微分方程时，数学家们为了寻找普遍性，提出了一种最一般形式的二阶线性微分方程，该方程涵盖了在物理学中具有重要意义的微分方程。这一方程被称为**超几何微分方程**，其形式如下：

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (7.26)$$

其中 α, β, γ 为常数。该微分方程的级数解称为**高斯超几何函数**或普通超几何函数，其表达式可以用伽马函数表示为：

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) := \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} x^n \quad (7.27)$$

从该级数展开的表达式可以看出，超几何函数在 α 和 β 交换时保持对称性。此外，如果 α 或 β 为负整数（例如 $-m$ ），则展开式前的常数分母会由于伽马函数的性质趋于无穷。然而，在前 m 项中，分子也会出现无穷大。这些无穷大的相互抵消（参见问题 11.4(c)）会导致前 m 项的和非零，而剩余部分的级数将为零。因此，我们有以下结论：

定理 7.1 超几何函数在 α 和 β 交换时具有对称性：

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; x) \quad (7.28)$$

此外，当 m 为正整数时， $F(-m, \beta; \gamma; x)$ 以及 $F(\alpha, -m; \gamma; x)$ 是一个多项式。

如前所述，许多无穷级数可以通过“积分”操作转换为积分表示的函数。在本例中，我们从超几何函数的级数展开式开始，通过在分子和分母中同时引入 $\Gamma(\gamma - \beta)$ ，得到：

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} \underbrace{\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}}_{\equiv B(\gamma-\beta, \beta+n)} x^n \quad (7.29)$$

现在，利用 $\Gamma(n+1) = n!$ 以及 **Beta** 函数的积分表示，我们可以得到：

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+n-1} \Gamma(\alpha+n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(tx)^n}{n!} \end{aligned} \quad (7.30)$$

最终，我们可以将超几何函数表示为积分的形式：

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} \quad (7.31)$$

很多普通的数学函数可以用超几何函数或它的极限表示出来，一些典型的例子如下：

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z {}_2F_1(1, 1; 2; -z) \\ (1-z)^{-a} &= {}_2F_1(a, 1; 1; z) \\ \arcsin z &= z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

7.2.2 合流超几何函数

超几何函数的行为完全由其参数 α, β, γ 决定。在数学物理中，大量的微分方程仅涉及两个参数的情况。为了实现这点，最有效的方法是合流过程，即令 $\beta \rightarrow \infty$ 。

替换超几何微分方程中的变量 $x = u/\beta$ ，并利用简单的链式法则将 x 的导数转换为 u 的导数，得到新的微分方程：

$$\frac{u}{\beta} \left(1 - \frac{u}{\beta}\right) \beta^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{u}{\beta}\right] \beta \frac{dy}{du} - \alpha \beta y = 0 \quad (7.33)$$

将整个方程除以 β ，然后取极限 $\beta \rightarrow \infty$ ，忽略 u/β 和 $1/\beta$ ，得到所谓的合流超几何微分方程：

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \quad (7.34)$$

其中，我们恢复了 x 作为自变量。

无穷级数解称为**合流超几何函数**。该解及其积分表示可以通过适当的极限操作从超几何函数的对应表达式推导出来。对方程 (7.27) 取极限，得到：

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} x^n \quad (7.35)$$

其中，我们使用了如下极限关系：

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\beta^n \Gamma(\beta)} &= \frac{(\beta+n-1)(\beta+n-2) \cdots \beta \Gamma(\beta)}{\beta^n \Gamma(\beta)} \\ &= \left(\frac{\beta+n-1}{\beta}\right) \left(\frac{\beta+n-2}{\beta}\right) \cdots \left(\frac{\beta}{\beta}\right) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 1. \end{aligned} \quad (7.36)$$

同样地，我们可以得到

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha; \gamma; x) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; x/\beta) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt (1-t)^{\gamma-\alpha-1} t^{\alpha-1} \underbrace{\left(1 - \frac{tx}{\beta}\right)^{-\beta}}_{\rightarrow e^{tx}}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

其中，我们利用了超几何函数在其前两个参数互换下的对称性。因此，合流超几何函数的积分表示为：

$$\Phi(\alpha; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt (1-t)^{\gamma-\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{tx} \quad (7.38)$$

7.2.3 贝塞尔函数

贝塞尔函数可以说是数学物理中最常用的函数之一。我们将在研究柱坐标系下的拉普拉斯方程解时再次遇到它们，并探讨它们与本章讨论的其他函数之间的联系。在此，我们仅以幂级数的形式引入它们。 ν 阶贝塞尔函数 $J_\nu(x)$ 是贝塞尔微分方程的解：

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0 \quad (7.39)$$

在后续章中，我们将展示如何推导 $J_\nu(x)$ 的幂级数展开式：

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (7.40)$$

注意 贝塞尔函数通常通过幂级数展开（或包含参数的积分表达）定义。一般来说，贝塞尔函数无法化简为更基本的函数，例如多项式、三角函数或指数函数的组合。

8 伽马函数

在数学物理中，理解经典特殊函数的方法有多种不同的途径，其中包括：作为二阶常微分方程的解；正交多项式展开；复平面上的围道积分；其他函数的积分变换；广义超几何级数或相关级数的特例；与李群的联系。这些方法提供了不同的视角，使得数学物理中的特殊函数可以在不同的背景下得到广泛应用。

例如与李群的联系可以参考如下表格，本课程不会讨论李群及其相关的特殊函数。

李群 (Lie Group)	相关特殊函数
特殊酉群 $SU(2)$	Wigner 函数, Jacobi 多项式
旋转群 $SO(3)$	球谐函数, Legendre 多项式
欧几里得群 $ISO(2), E(2)$	Bessel 函数
Heisenberg 群 H_3, H_4	Hermite 多项式
特殊线性群 $SL(2, \mathbb{R})$	超几何函数 (Hypergeometric Functions)
特殊正交群 $SO(n)$	Gegenbauer 函数
三阶三角矩阵群	Laguerre 多项式, Whittaker 函数

表 1: 部分李群及其相关的特殊函数

8.1 解析延拓

如果一个函数在区域 A 上解析, 我们有时可以将该函数扩展, 使其在更大的区域上仍然解析。这一过程称为 **解析延拓** (analytic continuation)。

例 8.1 考虑函数¹⁵

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{3t} e^{-zt} dt \quad (8.1)$$

该积分在区域

$$A = \{\operatorname{Re}(z) > 3\} \quad (8.2)$$

内绝对收敛, 因此 $F(z)$ 在 A 上解析。

我们是否可以将 $F(z)$ 解析延拓到更大的区域 B ? 即, 是否存在区域 B 以及一个函数 $\hat{F}(z)$ 使得:

1. B 包含 A ;
2. $\hat{F}(z)$ 在 B 上解析;
3. $\hat{F}(z)$ 在 A 上与 $F(z)$ 一致, 即对所有 $z \in A$, 有 $\hat{F}(z) = F(z)$ 。

解: 答案是肯定的, 我们知道在 A 内有

$$F(z) = \frac{1}{z-3} \quad (8.3)$$

这个函数在更大的区域 $B = \mathbb{C} - \{3\}$ 也是解析的。因此, 我们可以定义

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{z-3}, \quad z \in B \quad (8.4)$$

从而实现了 $F(z)$ 的解析延拓。

注意 通常情况下, 我们不会特意对解析延拓后的函数重新命名, 而是直接说 $F(z)$ 由式 (8.1) 所定义, 并可延拓至 B , 其表达式仍然为:

$$F(z) = \frac{1}{z-3}, \quad z \in B \quad (8.5)$$

定义 8.1 解析延拓 (Analytic Continuation)

假设 $f(z)$ 在区域 A 上解析, 并且 A 被包含在一个更大的区域 B 中。如果存在一个函数 $\hat{f}(z)$ 满足:

1. $\hat{f}(z)$ 在 B 上解析;
2. $\hat{f}(z) = f(z)$ 对所有 $z \in A$ 成立,

那么我们称 f 可以从 A 解析延拓到 B 。

通常情况下, 我们不会特别区分 $f(z)$ 和 $\hat{f}(z)$, 而是直接用相同的符号 f 表示 A 上的函数及其延拓至 B 的版本。

¹⁵这其实是 $f(t) = e^{3t}$ 的拉普拉斯变换

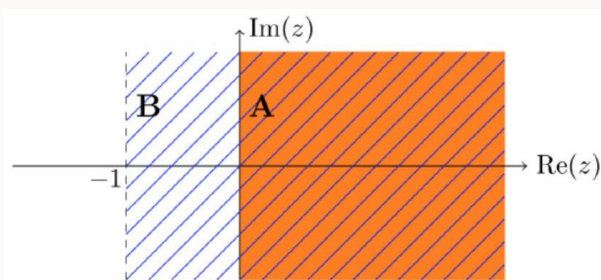


图 79: 区域 $A = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ 被包含在区域 $B = \{\operatorname{Re}(z) > -1\}$ 中。

8.1.1 解析延拓的唯一性

定理 8.1 设 f, g 在连通区域 A 上解析。如果 $f = g$ 在 A 的一个开子集上成立，则 $f = g$ 在整个 A 上成立。

证明： 定义 $h = f - g$ ，由假设知， $h(z) = 0$ 在 A 的某个开集上成立。这表明 h 的零点不是孤立的。

在第 7 章中，我们已经证明：若 h 是连通区域 A 上的解析函数，则要么 h 的零点是孤立的，要么 h 在 A 上恒等于零。

因此， $h \equiv 0$ 在 A 上成立，这意味着 $f = g$ 在 A 上恒等成立。

例 8.2 设 A 为去除实轴的复平面，定义两个在 A 上的函数如下：

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{若 } z \text{ 在上半平面} \\ 0, & \text{若 } z \text{ 在下半平面} \end{cases} \quad (8.6)$$

$$g(z) = \begin{cases} 1, & \text{若 } z \text{ 在上半平面} \\ 1, & \text{若 } z \text{ 在下半平面} \end{cases} \quad (8.7)$$

函数 f 和 g 在 A 上都是解析的，并且它们在某个开集（上半平面）上相等，但它们并不是同一个函数。

例 8.3 设 f 和 g 定义如下：

$$f(z) = \log(z), \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (8.8)$$

$$g(z) = \log(z), \quad -\pi < \theta < \pi \quad (8.9)$$

显然， f 和 g 在第一象限上相等。然而，我们不能直接使用定理来得出 $f = g$ 在整个定义域都成立。问题在于它们的定义区域不同： f 在 $\mathbb{C}$ 去除正实轴的区域上定义，而 g 在 $\mathbb{C}$ 去除负实轴的区域上定义。

f 和 g 共同的定义域是 $\mathbb{C}$ 去除实轴，而这个区域并不是连通的。因此，我们无法直接推广 $f = g$ 到整个定义域。

不过，由于它们都在上半平面上定义，因此可以得出 f 和 g 在上半平面上相等（这一点可以直接验证）。但是，在第一象限相等并不意味着它们在下半平面上也相等。

引理 8.2 (Schwarz 反射原理) 设 $f(z)$ 是定义在上半平面中某一区域 R 的解析函数, 该区域邻接实轴上的一部分 Γ , 并且 $f(z)$ 在 Γ 上连续, 且在 Γ 上纯实。则可以通过以下方式将 $f(z)$ 在下半平面关于 Γ 所对应的对称区域 R^* 上作解析延拓:

$$f(z) = f^*(z^*) \quad (8.10)$$

其中 z 为下半平面中的点。

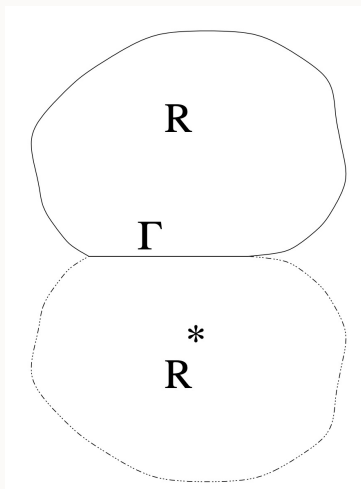


图 80: Schwarz 反射原理示意图

证明: 令 R^* 表示区域 R 关于 Γ 在下半平面中的对称映像。考虑定义函数 $g(z) := f^*(z^*)$ 。由于 $f(z)$ 在上半平面中解析, 我们可以设

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (8.11)$$

其中 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 是实函数, 并满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.12)$$

现在在下半平面中, 函数 $g(z)$ 可写为:

$$g(x + iy) = f^*(x - iy) = u(x, -y) - iv(x, -y) \quad (8.13)$$

可验证, $g(z)$ 仍满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, -y) = \frac{\partial}{\partial y} [-v(x, -y)], \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) = -\frac{\partial}{\partial x} [-v(x, -y)] \quad (8.14)$$

由 $f(z)$ 的解析性可知其偏导数连续, 因此 $g(z)$ 在 R^* 中解析。进一步地, 在实轴上有:

$$g(x) = f^*(x) = f(x) \quad (8.15)$$

根据题设, $f(x)$ 为实值函数, 故上述等式成立。

为了说明 $g(z)$ 是 $f(z)$ 在 $R^* \cup \Gamma$ 上的解析延拓, 我们定义新的函数 $h(z)$ 为:

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in R \\ g(z), & z \in R^* \end{cases} \quad (8.16)$$

由于 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 Γ 上连续一致, 并且在 $R \cup R^*$ 中分别解析, 因此根据莫雷拉 (Morera) 定理, $h(z)$ 在 $R \cup \Gamma \cup R^*$ 上解析。由此可知 $f(z)$ 的解析延拓在 Γ 上亦解析, 从而完成证明。

注意 若区域 R 邻接的不是实轴上的线段，而是某条解析曲线 Γ （即存在解析函数 $\Gamma(t)$ 将实轴的一部分映射至 Γ ），并且函数 $f(z)$ 在 Γ 上连续且实值，则类似的反射定理仍然成立。但在一般情形中，延拓函数的显式表达式可能无法给出。

8.2 伽马 Γ 函数

伽马函数 (Gamma function) 可能是物理问题讨论中最常出现的特殊函数。对于整数值, 它作为阶乘函数出现在所有泰勒展开中。此外, 正如我们将在后续讨论中看到的, 伽马函数在半整数参数下也经常出现。此外, 在许多函数 (例如非整数阶的贝塞尔函数) 的展开中, 伽马函数对于推广到非整数值的情况是必不可少的。

这里我们首先给出伽马函数三种常用的不同定义方式。

8.2.1 无穷极限 (欧拉)

定义 8.2 伽马函数的第一种定义方式由欧拉 (Euler) 提出, 其形式如下:

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (8.17)$$

这一定义在推导伽马函数的魏尔斯特拉斯无穷乘积形式以及计算 $\ln \Gamma(z)$ 的导数时非常有用。在本章及其后续内容中, z 可以是实数或复数。

将 z 替换为 $z+1$, 可得

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^{z+1} \quad (8.18)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z+n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \quad (8.19)$$

$$= z\Gamma(z). \quad (8.20)$$

这就是伽马函数的基本递推关系。

8.2.2 定积分 (欧拉)

定义 8.3 伽马函数的第二种定义方式, 通常称为欧拉积分 (Euler integral), 其形式如下:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (8.21)$$

对于 z 的取值范围的限制是必要的, 以避免积分的发散。

8.2.3 无穷乘积 (魏尔斯特拉斯)

定义 8.4 伽马函数的第三种定义 (魏尔斯特拉斯形式) 是无穷乘积:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} := ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (8.22)$$

其中 γ 是欧拉-马歇罗尼常数 (Euler-Mascheroni constant):

$$\gamma = 0.5772156619 \cdots, \quad (8.23)$$

魏尔斯特拉斯定义直接表明, $\Gamma(z)$ 在 $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ 处具有单极点。

8.2.4 解析延拓

积分定义要求 $\operatorname{Re} z > 0$ ，但由于 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 都在全复平面解析 ($z = 0, -1, -2, \dots$ 除外)，可以直接通过递推关系来完成 Γ 函数的解析延拓。这时，因为 $\Gamma(z+1)$ 在半平面 $\operatorname{Re} z > -1$ 内解析，因此就可以把

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1), \quad z \neq 0$$

看成是 $\Gamma(z)$ 在区域 $\operatorname{Re} z > -1$ 内的定义，而 $z = 0$ 点是 Γ 函数的一阶极点， $\operatorname{res} \Gamma(0) = 1$ 。重复上述步骤，还可以将 Γ 函数解析延拓到区域 $\operatorname{Re} z > -2$ ，

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2), \quad z \neq 0, -1 \quad (7.8)$$

$z = -1$ 也是 Γ 函数的一阶极点， $\operatorname{res} \Gamma(-1) = -1$ 。如此继续，就可以将 Γ 函数延拓到全复平面，而 $z = 0, -1, -2, \dots$ 都是它的一阶极点。

8.2.5 伽马函数的性质

$\Gamma(z)$ 在 $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ 处具有单极点，并且 $\Gamma(z)$ 在复平面没有零点。

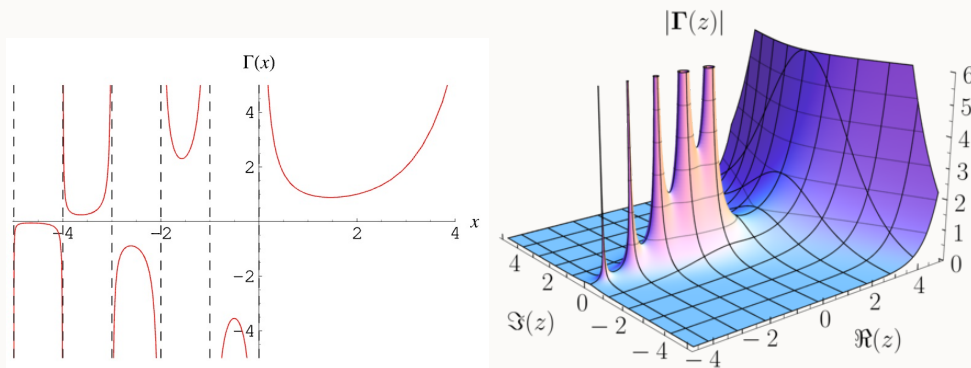


图 81: 左图：伽马函数 $\operatorname{Re}(\Gamma(x))$ 在实数轴上的图像。右图： $|\Gamma(x)|$ 在复平面的图像

$\Gamma(z)$ 的图像如图 81 所示。我们可以注意到：

- 在每个负整数区间， $\Gamma(z)$ 发生符号变化；
- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ；
- 伽马函数在 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间存在一个极小值，该点为 $z_0 = 0.46143\dots$ ，其值为 $\Gamma(z_0) = 0.88560\dots$ 。

此外，在极点 $z = -n$ (n 为非负整数) 处， $\Gamma(z)$ 的留数 R_n 由下式给出：

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \Gamma(-n + \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \Gamma(-n + 1 + \varepsilon)}{-n + \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \Gamma(-n + 2 + \varepsilon)}{(-n + \varepsilon)(-n + 1 + \varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon)}{(-n + \varepsilon) \cdots (-\varepsilon)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

这表明留数在 $z = -n$ 处的符号交替，并且其大小为 $1/n!$ 。

例 8.4 计算 n 维球体积

解:

在 $\mathbb{R}^n$ 中, n 维球体积 $V_n(r)$ 定义为:

$$V_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (8.25)$$

在球坐标系中, 我们有

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{aligned} \quad (8.26)$$

其中 $0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, 当 $i = 1, 2, \dots, n-2$ 。则求体积表示为

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \int_0^R r^{n-1} dr \int \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \dots \sin(\theta_{n-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \\ &= \int_0^R r^{n-1} dr S_{n-1}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

其中 S_{n-1} 表示 n 维球面面积。我们可以通过高斯积分方法求解 S_{n-1} 。

考虑高斯积分:

$$G(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (8.28)$$

利用单变量高斯积分结果:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}, \quad (8.29)$$

可知:

$$G(n) = \pi^{n/2}. \quad (8.30)$$

另一方面, 在 n 维球坐标系下, 可以对球壳积分:

$$G(n) = S_{n-1} \int_0^{\infty} r^{n-1} dr \exp(-r^2). \quad (8.31)$$

伽马函数定义为

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} r^{2n-1} e^{-r^2} dr. \quad (8.32)$$

从而:

$$S_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (8.33)$$

球体积为:

$$V_n(R) = \frac{R^n}{n} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{R^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (8.34)$$

8.2.6 伽马函数的围道积分表示

定义 8.5 伽马函数的一个围道积分表示形式在发展贝塞尔函数的渐近级数时是非常有用的，这一表示形式称为 Schlaefli 围道积分：

$$\int_C e^{-t} t^\nu dt = (e^{2\pi i \nu} - 1) \Gamma(\nu + 1) \quad (8.35)$$

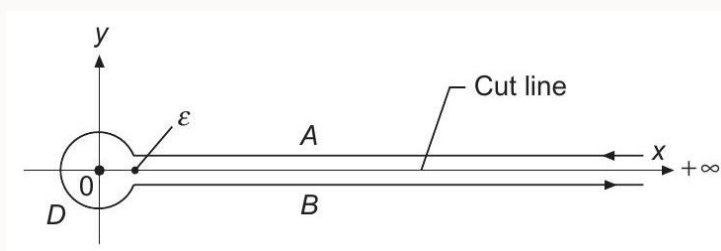


图 82: 伽马函数的围道积分。

其中， C 是图 82 中所示的围道。此围道积分表示仅当 ν 不是整数时才有用。对于整数 ν ，被积函数是整函数，方程 (8.35) 两边均为零，因此无法提供任何信息。然而，对于非整数 ν ， $t = 0$ 是被积函数的一个支点，使得方程的右侧计算出非零结果。

证明： 为了验证方程 (8.35)，我们在 $\nu + 1 > 0$ 的情况下分析积分路径各部分的贡献：

- 围道 A：在实轴上从 ∞ 到 $+\varepsilon$ 的积分结果为 $I_A = -\Gamma(\nu + 1)$ ，其中 $\arg(z) = 0$ ；
- 围道 B：在第四象限中，从 $+\varepsilon$ 到 ∞ 的积分结果为 $I_B = e^{2\pi i \nu} \Gamma(\nu + 1)$ ，因为 z 的幅角增加到 2π ；
- 围道 D：在原点周围的小圆弧上，若 $\nu > -1$ ，则其积分贡献为零。

综上，方程 (8.35) 得证。

由于此方程已经建立，我们可以对围道进行变形（只要不跨越支点和割线），因为在该区域内没有其他奇点需要回避。

对称形式 方程 (8.35) 也可以写成更对称的形式：

$$\int_C e^{-t} t^\nu dt = 2ie^{i\nu\pi} \Gamma(\nu + 1) \sin(\nu\pi) \quad (8.36)$$

其中， C 可以是图 82 中的围道，也可以是任何不穿越割线且围绕原点的变形路径，并且起点和终点分别位于割线的上方和下方，并在 $x = +\infty$ 处终止。

解析延拓 上述分析表明，方程 (8.35) 和 (8.36) 对于 $\nu > -1$ 是成立的。然而，我们注意到只要远离原点，该积分在 $\nu < -1$ 时依然存在，因此它对所有非整数 ν 都成立。这意味着，该围道积分表示形式提供了欧拉积分（方程 (8.21)）在所有非整数 ν 处的解析延拓。

8.3 黎曼 ζ 函数的定义与积分表示

定义 8.6 我们首先给出 $\zeta(z)$ 的定义, 该定义在级数收敛时成立:

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (8.37)$$

我们现在考虑 $\zeta(z)$ 在表达式 (8.37) 的收敛范围之外进行解析延拓的可能性。

定义 8.7 我们给出积分表示:

$$\zeta(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1} dt}{e^t - 1} \quad (8.38)$$

证明:

方程 (8.38) 的有效范围受到其被积函数在 t 取小值时的行为限制。由于当 $t \rightarrow 0$ 时, 分母趋近于 t , 整体的 t 依赖性表现为 t^{z-2} 。将 z 设为 $z = x + iy$, 并写成 $t^{z-2} = t^{x-2} e^{iy \ln t}$, 可以看出, 类似于方程 (8.37), 方程 (8.38) 仅在 $\operatorname{Re}(z) > 1$ 时收敛。

从方程 (8.38) 的右侧开始, 设其为 I , 我们通过将分子和分母同时乘以 e^{-t} 并展开分母 $1 - e^{-t}$, 得到:

$$I = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1} e^{-t} dt}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t^{z-1} e^{-mt} dt \quad (8.39)$$

接下来, 我们对每一项变换积分变量, 使所有项均包含相同的指数因子 e^{-t} , 即令 $t' = mt$, 从而:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{t}{m} \right)^{z-1} e^{-t} \left(\frac{dt}{m} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z} \right) \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \zeta(z) \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \zeta(z) \end{aligned} \quad (8.40)$$

在式 (8.40) 的第二行, 我们识别出求和项即为 ζ 函数, 而积分项正是伽马函数的欧拉积分表示 (方程 (8.21)), 因此 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 与之抵消, 得出所需的最终结果, 即方程 (8.38)。

注意 方程 (8.38) 与 Γ 函数的欧拉积分唯一的区别在于分母部分: 原来的 Γ 函数积分的分母为 e^t , 而 ζ 函数的积分分母则为 $e^t - 1$ 。

8.3.1 围道积分表示

我们首先引入一个围道积分, 其被积函数与方程 (8.38) 相同, 并采用与伽马函数类似的开放围道 (见图 82)。与伽马函数的情况一样, 我们不希望将 z 限制为整数值, 因此一般情况下, 被积函数在 $t = 0$ 处具有一个支点, 我们同样将割线放在正实轴上。

在 $\operatorname{Re} z > 1$ 的情况下，我们计算围道积分 I ，其各部分贡献分别标注为图 82 中的 A, B, D 。对于 $\operatorname{Re} z > 1$ ，小圆弧 D 对积分没有贡献，而

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{t^{z-1} dt}{e^t - 1} = -\zeta(z), \\ I_B &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{t^{z-1} e^{2\pi i(z-1)} dt}{e^t - 1} = e^{2\pi i(z-1)} \zeta(z) = e^{2\pi iz} \zeta(z). \end{aligned} \quad (8.41)$$

综上所述我们得到

$$I = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_C \frac{t^{z-1} dt}{e^t - 1} = (e^{2\pi iz} - 1) \zeta(z) \quad (8.42)$$

注意 方程 (8.42) 仅在 z 不是整数时才有意义。

我们希望对方程 (8.42) 进行围道变形，以去除 $\operatorname{Re} z > 1$ 的限制。这一变形相当于对 $\zeta(z)$ 进行解析延拓，使其适用于更大范围的 z ，并能避免围道积分在 $t = 0$ 附近的发散。

不同于伽马函数，此处的被积函数在 $t = 2n\pi i$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 处具有单极点。因此，在变形围道时，若包含这些极点，则需要考虑它们对积分值的影响。若首先将小圆 D 扩展到有限半径（但小于 $2\pi i$ ），则不会改变积分值 I ，但其有效性将扩展至负的 z 值。若对于 $z < 0$ ，进一步扩展 D ，使其变成无穷大的开放圆（但不穿过极点），则围道积分减少为零，同时我们需要考虑新围住的极点贡献。

$$I = (e^{2\pi iz} - 1) \zeta(z) = -\frac{2\pi i}{\Gamma(z)} \sum_{n=1}^{\infty} (t = \pm 2n\pi i \text{ 的留数}) \quad (8.43)$$

在极点 $t = +2\pi ni$ ，留数为 $(2n\pi e^{\pi i/2})^{z-1}$ ，而在 $t = -2\pi ni$ ，留数为 $(2n\pi e^{3\pi i/2})^{z-1}$ 。整理后可得

$$(e^{2\pi iz} - 1) \zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{(2\pi)^z}{\Gamma(z)} (e^{3\pi iz/2} - e^{\pi iz/2}) \quad (8.44)$$

由于 $z < 0$ ，求和项收敛，可识别为 $\zeta(1-z)$ 。该方程展示了 $\zeta(z)$ 与 $\zeta(1-z)$ 之间的对称关系，这一结果由黎曼首次发现。利用伽马函数的反射公式，我们得到

$$\frac{e^{3\pi iz/2} - e^{\pi iz/2}}{e^{2\pi iz} - 1} = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sin \pi z} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(z/2)\Gamma(1-z/2)} \quad (8.45)$$

最终整理得

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{\pi^z 2^z \Gamma(1-z)}{\Gamma(z/2)\Gamma(1-z/2)} \quad (8.46)$$

利用倍乘公式，方程 (8.46) 可进一步化简为

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-z/2} \zeta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{-(1-z)/2} \zeta(1-z) \quad (8.47)$$

该反射公式允许在 $\operatorname{Re} z < 0$ 的半平面中从 $\operatorname{Re} z > 1$ 处的值生成 $\zeta(z)$ 。

8.3.2 黎曼 ζ 函数的零点

我们可以证明, $\zeta(z)$ 在其级数定义收敛的区域内没有零点, 并且由公式 (8.47) 可知, $\zeta(z)$ 在半平面 $\operatorname{Re} z < 0$ 内也不会为零, 除了 $\Gamma(z/2)$ 存在奇点的点, 即 $z = -2, -4, \dots, -2n, \dots$ 。此外, $\Gamma(z/2)$ 在 $z = 0$ 处也是奇点, 但如我们即将证明的, $\zeta(1)$ 的奇点会抵消 $\Gamma(0)$ 的奇点, 导致 $\zeta(0)$ 仍然是非零的。

$\zeta(z)$ 在负偶整数处的零点被称为**平凡零点**, 因为它们来源于 Γ 函数的奇点。而 $\zeta(z)$ 的其他零点 (其数量是无限的) 必须位于 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ 这一带区域, 该区域被称为**黎曼 ζ 函数的临界带**。

为了在临界带中求取 $\zeta(z)$ 的值, 我们通过对狄利克雷级数 $\eta(z)$ 进行解析延拓来推进到 $\operatorname{Re} z = 0$, 狄利克雷级数的定义如下 (适用于 $\operatorname{Re} z > 1$):

$$\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{1 - 2^{1-z}} = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \quad (8.48)$$

该交错级数对于所有 $\operatorname{Re} z > 0$ 都是收敛的, 因此可用于在整个临界带中定义 $\zeta(z)$, 但最适合在 $\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$ 时使用, 因为此时收敛较快。对于 $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ 的值, 我们可以通过反射公式 (8.47) 从 $\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$ 处的值计算得到。

例 8.5 利用式 (8.48) 验证 $\zeta(z)$ 在 $z = 1$ 处的奇点是一个简单极点, 并求其留数。

解: 我们计算 $\zeta(z)$ 在 $z = 1$ 处的留数:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z - 1}{1 - 2^{1-z}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (8.49)$$

利用洛必达法则, 我们可以计算

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - 2^{1-z}}{z - 1} = -2^{1-z} \ln 2 \Big|_{z=1} = -\ln 2 \quad (8.50)$$

而级数求和部分正是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \quad (8.51)$$

因此,

$$\operatorname{Res}(\zeta(z), 1) = \frac{\ln 2}{-\ln 2} = 1 \quad (8.52)$$

例 8.6 计算 $\zeta(0)$ 的值。

解: 回到反射公式 (8.47), 并注意到

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\zeta(1-z)}{\Gamma(z/2)} = \frac{-\operatorname{Res}(\zeta(s), s=1)}{2\operatorname{Res}(\Gamma(s), s=0)} = -\frac{1}{2} \quad (8.53)$$

于是,

$$\zeta(0) = \Gamma(1/2)\pi^{-1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad (8.54)$$

8.3.3 黎曼猜想与素数分布

素数的渐近分布与 $\zeta'(z)/\zeta(z)$ 的极点密切相关, 特别是与黎曼 ζ 函数的非平凡零点相关。黎曼猜想断言, 所有非平凡零点都位于**临界线** $\Re z = \frac{1}{2}$ 上。如果黎曼猜想成立, 将能推导出许多重要的数学结果。数值计算已经验证了 $\zeta(z)$ 的前 300×10^9 个非平凡零点都是单零点, 并且确实位于临界线上。尽管许多杰出的数学家努力尝试证明黎曼猜想, 但在过去 150 余年中, 它仍未得到证明, 被认为是现代数学中最重要的未解难题之一。

9 傅里叶变换

9.1 傅里叶级数回顾

幂级数是函数级数的一种特殊情况，尽管这些函数既简单又强大，但它们并不能适用于所有物理应用。在物理的许多问题中，需要更一般的函数展开形式。

定理 9.1 设函数 $f(t)$ 在区间 (a, b) 上定义，则它可以表示为正交多项式的无穷级数：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(t), \quad (9.1)$$

其中系数 a_n 由下式给出：

$$a_n = \frac{1}{h_n} \int_a^b f(t) F_n(t) w(t) dt. \quad (9.2)$$

在数学物理中，有许多被称为经典正交多项式的函数，它们具有一系列重要性质，在此不再赘述。

在实际应用中，最广泛使用的函数级数是傅里叶级数，其中的基函数是正弦函数和余弦函数。傅里叶级数特别适用于周期函数（periodic function）。假设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上定义，我们能否像使用正交多项式展开函数那样，将其展开为正弦函数和余弦函数的级数呢？答案是肯定的。令 $L = b - a$ 表示区间的长度，并考虑以下基函数：

$$\sin \frac{2n\pi x}{L}, \quad \cos \frac{2n\pi x}{L}. \quad (9.3)$$

我们写下级数展开的形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) \quad (9.4)$$

其中，我们已经将 $n = 0$ 的项单独分离出来。

正弦和余弦函数具有以下有用的性质：

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin \frac{2n\pi x}{L} dx &= \int_a^b \cos \frac{2n\pi x}{L} dx = \int_a^b \sin \frac{2n\pi x}{L} \cos \frac{2m\pi x}{L} dx = 0, \\ \int_a^b \sin \frac{2n\pi x}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L/2, & m = n \neq 0, \end{cases} \\ \int_a^b \cos \frac{2n\pi x}{L} \cos \frac{2m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L/2, & m = n \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.5)$$

与正交多项式的情况类似，这些性质为我们提供了一种确定傅里叶级数系数的方法。对等式 (9.4)

两边从 a 到 b 进行积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= a_0 \int_a^b dx + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\ &= (b-a)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_a^b \cos \frac{2n\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_a^b \sin \frac{2n\pi x}{L} dx}_{=0}\end{aligned}\quad (9.6)$$

从而得到

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_a^b f(x)dx. \quad (9.7)$$

接下来, 将 (9.4) 乘以 $\cos(2m\pi x/L)$ 并在 $[a, b]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cos \frac{2m\pi x}{L} dx &= a_0 \int_a^b \cos \frac{2m\pi x}{L} dx + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) \cos \frac{2m\pi x}{L} dx \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \cos \frac{2n\pi x}{L} \cos \frac{2m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_a^b \sin \frac{2n\pi x}{L} \cos \frac{2m\pi x}{L} dx \\ &= a_m L/2,\end{aligned}\quad (9.8)$$

因此

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx. \quad (9.9)$$

同理, 乘以 $\sin(2m\pi x/L)$ 并在 $[a, b]$ 上积分, 得到

$$b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx. \quad (9.10)$$

(9.4) 右端的级数是周期性的, 这意味着对于区间 (a, b) 之外的 x , $f(x)$ 也将是周期性的。事实上, 从 (9.4) 出发, 可以证明

$$\begin{aligned}f(x+L) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2n\pi(x+L)}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi(x+L)}{L} \right\} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} + 2n\pi \right) + b_n \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} + 2n\pi \right) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) = f(x)\end{aligned}\quad (9.11)$$

这说明 $f(x)$ 在每个长度为 L 的区间末端重复自身, 即它是以 L 为周期的周期函数。因此, 傅里叶级数特别适用于表示这类函数。实际上, 任何周期函数都可以展开为傅里叶级数, 而正弦和余弦函数的简单性使得这种展开在电气工程、声学等涉及周期信号的应用领域极具实用价值。

例 9.1 在电路的研究中, 经常遇到不同形状的周期性电压信号。其中一个典型的例子是所谓的方波信号, 其幅值为 V_0 , 持续时间和静息时间均为 T (见图 83)。电压 $V(t)$ 作为时间的函数,

可以展开为傅里叶级数。由于一个完整的周期为 $(0, 2T)$ ，因此我们可以表示为：

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{2T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{2T} \right). \quad (9.12)$$

计算展开系数。

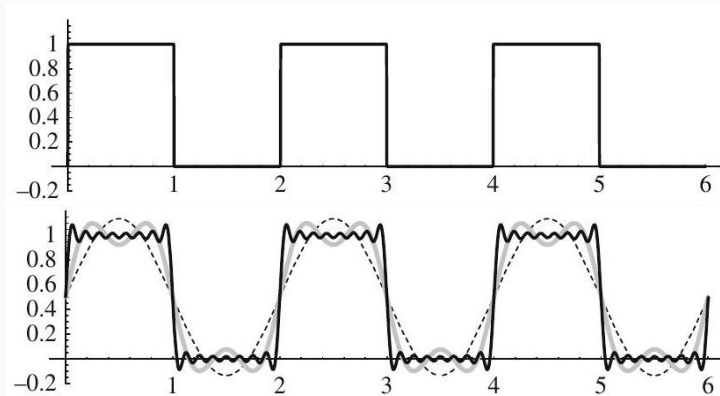


图 83: 上图：方波电压信号，取 $V_0 = 1$ ， $T = 1$ 。下图：方波信号的傅里叶级数逼近，虚线表示级数的第一项，灰色粗线表示取前三项的近似，实线表示取十五项的近似。

解： 方波信号定义为：

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & T < t \leq 2T. \end{cases} \quad (9.13)$$

计算傅里叶级数的系数：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} V(t) dt. \\ a_n &= \frac{2}{2T} \int_0^{2T} V(t) \cos \frac{2n\pi t}{2T} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2T} V(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt. \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_0^{2T} V(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt. \end{aligned} \quad (9.14)$$

代入 $V(t)$ ，计算 a_0 和 a_n ：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2T} \int_0^T V_0 dt = \frac{1}{2} V_0, \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos \frac{n\pi t}{T} dt = 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

计算 b_n ：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \sin \frac{n\pi t}{T} dt = -\frac{V_0}{T} \frac{T}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{T} \Big|_0^T. \\ b_n &= \frac{V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{V_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

可以看到，傅里叶级数的余弦项全部为零，只有正弦项贡献，并且仅当 n 为奇数时 $b_n \neq 0$ 。因此，我们令 $n = 2k + 1$ ，其中 k 取所有整数值，并代入 (9.12)，得到：

$$V(t) = \frac{1}{2} V_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)\pi} [1 - (-1)^{2k+1}] \sin \frac{(2k+1)\pi t}{T}. \quad (9.17)$$

化简得：

$$V(t) = \frac{V_0}{2} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin [(2k+1)\pi t/T]}{2k+1} \right\}. \quad (9.18)$$

图 83 (底部) 展示了方波信号的傅里叶级数截断到第一项、前三项和第十五项时的近似情况。可以观察到，在不连续点处，傅里叶级数的逼近出现了明显的过冲 (overshoot) 现象。这种现象被称为吉布斯现象 (Gibbs Phenomenon)，它是所有不连续函数傅里叶展开的普遍特征。

三角函数与指数函数之间的联系可以用于简化周期函数的傅里叶级数展开的形式。若将以下关系代入(9.4)：

$$\begin{aligned} \cos \frac{2n\pi x}{L} &= \frac{e^{2in\pi x/L} + e^{-2in\pi x/L}}{2}, \\ \sin \frac{2n\pi x}{L} &= \frac{e^{2in\pi x/L} - e^{-2in\pi x/L}}{2i}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

并收集相似的指数项，则可以得到：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) e^{2in\pi x/L} + (a_n + ib_n) e^{-2in\pi x/L} \right] \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{2in\pi x/L} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-2in\pi x/L}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

在第二个求和中，令 $n = -m$ ，则：

$$\text{第二项求和} = \frac{1}{2} \sum_{m=-1}^{-\infty} (a_{-m} + ib_{-m}) e^{2im\pi x/L} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{2in\pi x/L}. \quad (9.21)$$

在最后一步，我们重新将哑指标 (dummy index) 替换回 n 。若定义新系数 A_n 为：

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n - ib_n), & 1 \leq n \leq \infty, \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}), & -\infty \leq n \leq -1, \\ a_0, & n = 0, \end{cases} \quad (9.22)$$

并将其代入傅里叶级数展开式，则可以得到：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{2in\pi x/L}, \quad \text{其中 } L = b - a. \quad (9.23)$$

要直接求得 A_n ，我们可以将上述方程两侧乘以 $e^{-2ik\pi x/L}$ ，然后在区间 $[a, b]$ 上积分，并利用以下积分性质：

$$\int_a^b e^{2i(n-k)\pi x/L} dx = L\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ L, & n = k. \end{cases} \quad (9.24)$$

其中 δ_{nk} 为克罗内克 (Kronecker) δ 。因此，我们有：

$$A_k = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2ik\pi x/L} dx, \quad \text{或记作 } A_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2in\pi x/L} dx. \quad (9.25)$$

通常，我们希望对傅里叶系数进行重新缩放，以使求和公式和积分公式的前因子保持一致。因此，定义：

$$f_n := \sqrt{L} A_n, \quad (9.26)$$

则傅里叶级数表达式变为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{2in\pi x/L}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b f(x) e^{-2in\pi x/L} dx. \quad (9.27)$$

注意 傅里叶级数的系数 f_n 通常是复数；然而，当 $f(x)$ 是实函数时，指数项及其复系数相加后，最终的结果可以表示为具有实系数的正弦和余弦函数的无穷级数。事实上，我们可以利用方程 (9.27) 来证明这一点。

证明： 首先，我们注意到对于实值函数 $f(x)$ ，有如下性质：

$$f_n^* = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b f(x) e^{+2in\pi x/L} dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b f(x) e^{-2i(-n)\pi x/L} dx = f_{-n}. \quad (9.28)$$

接下来，我们将式 (9.4) 中的求和分为正整数、负整数和零的三部分：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n e^{2in\pi x/L} + \frac{f_0}{\sqrt{L}} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{2in\pi x/L}. \quad (9.29)$$

对第一项求和，我们令哑指数 n 变换为 $-m$ ，则可以重写为：

$$\begin{aligned} \text{第一项} &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{-m=-\infty}^{-1} f_{-m} e^{-2im\pi x/L} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=1}^{\infty} f_{-m} e^{-2im\pi x/L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^* e^{-2im\pi x/L} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* e^{-2in\pi x/L}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

其中，我们利用了式 (9.28)，并在最后将求和变量 m 重新换回 n 。将上式代入 (9.29)，得到：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f_0}{\sqrt{L}} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^* e^{-2in\pi x/L} + f_n e^{2in\pi x/L} \right) \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{L}} + \frac{2}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(f_n e^{2in\pi x/L} \right). \end{aligned} \quad (9.31)$$

这表明 $f(x)$ 确实是实值函数。此外，由 (9.27) 可知，当 $f(x)$ 是实函数时， f_0 也是实数。此外，不难证明，第一行括号中的表达式可以表示为一个具有实系数的正弦和余弦函数之和。

例 9.2 让我们重新计算方波电势的傅里叶级数展开（其三角函数形式的展开已在例 9.1 中计算），但这次使用指数函数进行展开。根据方程 (9.27)，对于 $n \neq 0$ ，我们有：

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^{2T} V(t) e^{-2in\pi t/(2T)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^T V_0 e^{-in\pi t/T} dt \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{2T}} \frac{T}{-in\pi} e^{-in\pi t/T} \Big|_0^T \\ &= \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{V_0}{in\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned} \quad (9.32)$$

因为 $e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$ 。类似地，我们可以得到：

$$f_0 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}. \quad (9.33)$$

接下来，将这些结果代入傅里叶级数展开式：

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{2in\pi t/2T} \quad (9.34)$$

得到：

$$V(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{V_0}{2in\pi} [1 - (-1)^n] e^{2in\pi t/2T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0}{2in\pi} [1 - (-1)^n] e^{2in\pi t/2T}. \quad (9.35)$$

如果我们对第一项求和变量进行变换，将 n 变为 $-m$ ，然后再换回 n ，并将两个求和合并，可以得到：

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0}{2in\pi} [1 - (-1)^n] (e^{in\pi t/T} - e^{-in\pi t/T}) \\ &= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{2in} \underbrace{(e^{in\pi t/T} - e^{-in\pi t/T})}_{=2i \sin(n\pi t/T)} \\ &= \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\pi t/T]}{2k+1}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

这正是我们在例 9.1 中使用三角函数得到的展开式，表明傅里叶级数的指数形式和三角形是等价的。

9.2 狄拉克 δ 函数回顾

例 9.3 (线性电荷分布) 考虑长度为 L 的直线形电荷分布，具有均匀的电荷线密度，如图 84 (a) 所示。如果该线段的总电荷为 q ，则电荷线密度为 $\lambda = q/L$ 。我们希望研究在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上描述线性密度的函数图像。假设线段的中点位于 x_0 ，其长度为 L ，则该函数的图像如图 84 (b) 所示。

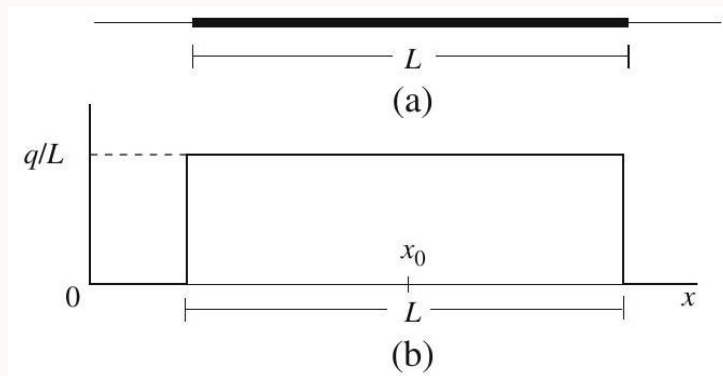


图 84: (a) 带电线段及 (b) 其电荷线密度函数的图像。

该函数 $\lambda(x)$ 在 $x_0 - L/2$ 之前取值为零，在区间 $(x_0 - L/2, x_0 + L/2)$ 内取值为 q/L ，在 $x_0 + L/2$ 之后再次变为零。因此，可以将 $\lambda(x)$ 表示为：

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - L/2, \\ q/L, & x_0 - L/2 < x < x_0 + L/2, \\ 0, & x > x_0 + L/2. \end{cases} \quad (9.37)$$

现在假设我们将线段的两端压缩，使其长度缩短至 $L/2$ ，但保持中点位置和总电荷量不变。新的电荷线密度函数为：

$$\lambda(x, x_0) = q \begin{cases} 0, & x < x_0 - L/4, \\ 2/L, & x_0 - L/4 < x < x_0 + L/4, \\ 0, & x > x_0 + L/4. \end{cases} \quad (9.38)$$

在此表示中，我们将 q 提取出来，以方便后续讨论。同时，我们引入了第二个参数 x_0 来明确函数对中点位置的依赖。类似地，我们可以将线段缩小为任意比例，同时保持总电荷量和中点位置不变。如果将长度缩小到 L/n ，并将函数记作 $\lambda_n(x, x_0)$ ，则可以写为：

$$\lambda_n(x, x_0) = q \begin{cases} 0, & x < x_0 - L/(2n), \\ n/L, & x_0 - L/(2n) < x < x_0 + L/(2n), \\ 0, & x > x_0 + L/(2n). \end{cases} \quad (9.39)$$

图 85 显示了当 $n = 10$ 及更小的 n 值时 $\lambda_n(x, x_0)$ 的变化情况。可以看到，随着 n 增加，函数的高度升高，而其宽度逐渐减小。

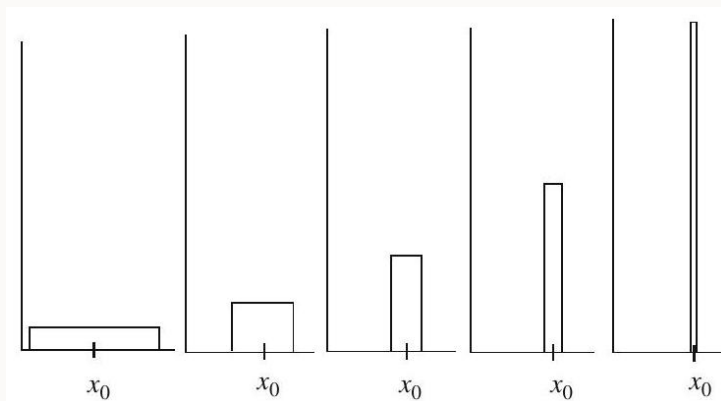


图 85: 电荷线密度函数随着线段长度缩短的变化情况。

例 9.4 平滑变化的电荷分布

前面讨论的电荷分布是一个从零突然跃升到某一有限值，然后又突然降为零的分布。然而，在许多物理情境中，电荷分布往往是平滑变化的，而不是突变的。因此，我们考虑一个电荷分布，其值平滑上升到最大值，然后再平滑地下降到零。有许多函数可以描述这样的分布，例如：

$$\lambda_n(x, x_0) = q \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \quad (9.40)$$

该函数在 $x = x_0$ 处达到峰值 $q\sqrt{n/\pi}$ ，并且在远离 x_0 的方向上逐渐减小。该函数对于不同 n 值的变化情况如图 86 所示。可以看出，随着 $n \rightarrow \infty$ ， $\lambda_n(x, x_0)$ 的图像逐渐变窄，即其“宽度”变得越来越小。

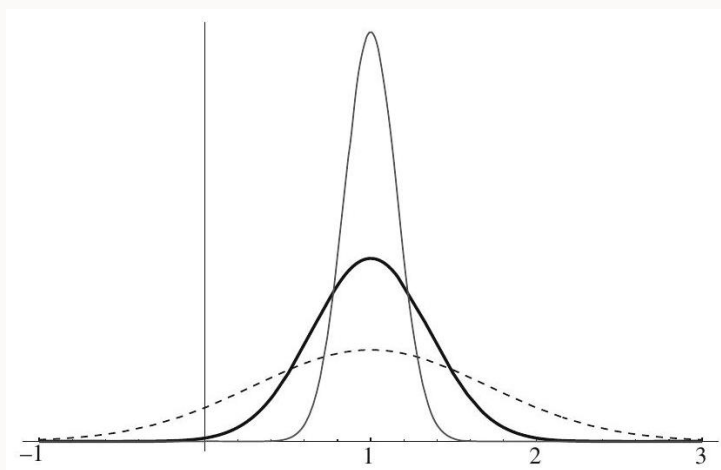


图 86: 高斯钟形曲线的变化趋势。当曲线的宽度趋于零时，该函数逼近狄拉克 δ 函数。虚线对应 $n = 1$ ，粗实线对应 $n = 4$ ，细实线对应 $n = 20$ 。

在上述两种情况下， $\lambda_n(x, x_0)$ 都是严格意义上的线性（电荷）密度函数，因为其积分能够给出总电荷 q 。对于第一种情况，这一点是显然的，因为该函数是按照这个方式定义的。而对于第二种情况，我们可以对 $\lambda_n(x, x_0)$ 在整个实数区间 $(-\infty, +\infty)$ 上进行积分，同样能够得到总电荷 q 。这是因为该函数在整个实轴上均为非零值。此外，即使是第一种情况，我们也可以将积分区间扩展到整个实数轴，因为该函数在 $x_0 - L/2n$ 到 $x_0 + L/2n$ 之外均为零，不会对积分产生额外贡献。因此，我们可以统一写成：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(x, x_0) dx = q \quad (9.41)$$

为了便于分析，我们可以对 $\lambda_n(x, x_0)$ 进行归一化，并定义新的函数 $\delta_n(x, x_0)$ ：

$$\delta_n(x, x_0) := \frac{\lambda_n(x, x_0)}{q} \quad (9.42)$$

这样，对于第一种情况， $\delta_n(x, x_0)$ 具有如下形式：

$$\delta_n(x, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < x_0 - L/2n \\ n/L & \text{if } x_0 - L/2n < x < x_0 + L/2n \\ 0 & \text{if } x > x_0 + L/2n \end{cases} \quad (9.43)$$

而对于第二种情况，归一化的函数为：

$$\delta_n(x, x_0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \quad (9.44)$$

无论是哪种情况，这些函数都满足以下性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x, x_0) dx = 1 \quad (9.45)$$

即在整个实数范围上的积分始终等于 1，并且与参数 n 无关。这表明这些函数是归一化的，并可以用于逼近狄拉克 δ 分布函数。

定义 9.1 狄拉克 δ 函数

狄拉克 δ 分布函数 $\delta(x, x_0)$ 定义为归一化函数 $\delta_n(x, x_0)$ 在 $n \rightarrow \infty$ 极限下的极限：

$$\delta(x, x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x, x_0) \quad (9.46)$$

它具有以下积分性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, x_0) dx = 1 \quad (9.47)$$

该性质可由方程 9.45 推导而得，因为 $\delta_n(x, x_0)$ 的积分独立于 n 。

注意 狄拉克 δ 函数在 x_0 处具有无穷大的值，同时其宽度趋于零，但这两个极端特性相互补偿，使得该函数的总积分值为有限数值。严格来说，狄拉克 δ 函数并不是通常的函数，因为它在唯一非零的点 x_0 处取无穷大。我们可以将其视为一种广义函数，我们在积分的意义下理解它。

尽管我们用逗号分隔了狄拉克 δ 函数的参数，但该函数实际上仅依赖于两个参数的差值。这一点可以通过将狄拉克 δ 函数视为指数函数极限的方式来理解，因为指数函数显然是 $x - x_0$ 的函数。因此，我们得到以下重要关系：

$$\delta(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (9.48)$$

特别地，由于 δ 函数在 $x = x_0$ 处趋于无穷，我们有：

$$\delta(x, x_0)|_{x=x_0} = \delta(x - x_0)|_{x=x_0} = \delta(0) = \infty \quad (9.49)$$

由于狄拉克 δ 函数在几乎所有地方都为零，我们可以将积分区间缩小到一个更小的范围。实际上，只要 x_0 在区间 (a, b) 内，我们有：

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (9.50)$$

如果 x_0 不在区间 (a, b) 内，则由于积分区间内 δ 函数始终为零，积分结果也为零。因此，我们总结如下：

狄拉克 δ 函数的积分性质

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{如果 } a < x_0 < b \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (9.51)$$

例 9.5 三点电荷 $-q, 2q, -q$ 分别位于 x 轴上的 $-a$ 、原点和 $+a$ 处。如何表示这种电荷分布的线性电荷密度？

解： 我们得到：

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \sum_{k=1}^3 q_k \delta(x - x_k) \\ &= -q\delta(x - (-a)) + 2q\delta(x - 0) - q\delta(x - a) \\ &= -q\delta(x + a) + 2q\delta(x) - q\delta(x - a). \end{aligned} \quad (9.52)$$

狄拉克 δ 函数确保除了 $x = a, x = -a, x = 0$ 处之外，其他地方的电荷密度均为零。

例 9.6 使用狄拉克 δ 函数描述线性电荷分布的一个更有趣的例子是：在一条直线上等间距排列、大小相等但符号交替的无穷多个点电荷。这是离子晶体的一维模型。

解： 假设每个点电荷的大小为 $\pm q$ ，相邻电荷之间的间距为 a ，并且电荷从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$ ，其中原点处放置一个正电荷，如图 87 所示。那么，该电荷分布的线性电荷密度可表示为：

$$\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k q \delta(x - ka). \quad (9.53)$$

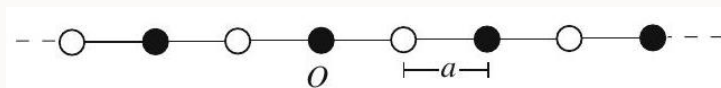


图 87：一维离子晶体。黑色圆点表示正电荷，白色圆点表示负电荷。

注意，当 k 为奇数时，电荷为负；当 k 为偶数时，电荷为正。这是因为我们在原点放置了一个正电荷。如果我们选择在原点放置负电荷，则整个排列将相对于原排列平移一个间距 a 。

9.2.1 狄拉克 δ 函数的性质

从数学的角度来看, 狄拉克 δ 函数最重要的性质之一是它与“平滑”函数在积分中的作用, 这一性质有时甚至被用作 δ 函数的定义。

考虑一个包含 $\delta_n(x - x_0)$ 的积分。如果 $\delta_n(x - x_0)$ 所乘的函数 $f(x)$ 是平滑的, 并且 n 足够大, 则乘积 $f(x)\delta_n(x - x_0)$ 在 $\delta_n(x - x_0)$ 显著不为零的狭窄区间外几乎消失。例如, 当 $n = 10^7$ 且 $x = x_0 + 0.001$ 时, 若 $\delta_n(x - x_0)$ 采用方程 (9.47) 中的指数形式, 则有

$$\delta_n(x - x_0) = 0.08,$$

因此, $f(x)\delta_n(x - x_0)$ 在 x_0 附近宽度 0.002 的小区间内的值减少至其在 x_0 处的 8%。当 n 取更大值时, 这种衰减更加显著。

事实上, 无论选择何种函数 $f(x)$, 总可以找到一个足够大的 n 使得 $f(x)\delta_n(x - x_0)$ 在任意短的区间内下降到任意小的值。因此, 我们可以将对全实数的积分近似为在一个小区间 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ 内的积分:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_n(x - x_0)dx &\approx \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} f(x)\delta_n(x - x_0)dx \\ &\approx f(x_0) \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \delta_n(x - x_0)dx \\ &\approx f(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x - x_0)dx = f(x_0). \end{aligned}$$

第二行的近似是由于 $f(x)$ 在小区间 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ 内几乎保持不变。第三行的近似是因为 $\delta_n(x - x_0)$ 在该区间外几乎为零, 而等号成立是由于 $\delta_n(x - x_0)$ 是一个线性密度函数。

当取极限 $n \rightarrow \infty$ 时, $\delta_n(x - x_0)$ 变为狄拉克 δ 函数, 从而得到以下重要关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0). \quad (9.54)$$

定义 9.2 狄拉克 δ 函数满足以下性质:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{如果 } a < x_0 < b, \\ 0 & \text{否则。} \end{cases} \quad (9.55)$$

换句话说, 积分的结果是函数 $f(x)$ 在 δ 函数参数的零点处的值, 前提是该零点位于积分区间内。

如前所述, 狄拉克 δ 函数并不是一个普通的函数。然而, 在数学上可以系统地研究它及其他类似的“奇异”函数 (称为分布)。实际上, 在所有物理应用中, 分布总是出现在积分内部, 而一旦出现, 方程 9.55 就告诉我们如何处理此类积分。积分的结果始终是良好定义的, 因为它仅仅是某个“良好”函数在一点 x_0 处的值。

事实上, 积分的结果如此良好, 以至于我们甚至可以定义狄拉克 δ 函数的导数。利用分布积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = f(x) \delta(x - x_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \delta(x - x_0) dx \quad (9.56)$$

及边界条件 $f(x) \delta(x - x_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, 可以得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0). \quad (9.57)$$

狄拉克 δ 函数的高阶导数可以类似地得到。

定理 9.2 狄拉克 δ 函数的 n 阶导数满足以下关系:

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & \text{若 } a < x_0 < b, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (9.58)$$

其中, 上标 (n) 表示 δ 函数的 n 阶导数。

定理 9.3 若 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内具有唯一零点 c , 且其导数 $g'(c) \neq 0$, 则狄拉克 δ 函数满足以下性质:

$$\int_a^b \delta(g(x)) dx = \frac{1}{|g'(c)|} \quad (9.59)$$

证明: 由于 $\delta(g(x))$ 仅在 $x = c$ 处取非零值, 我们可以将积分区间缩小到 $(c - \epsilon, c + \epsilon)$, 即:

$$\int_a^b \delta(g(x)) dx = \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \delta(g(x)) dx. \quad (9.60)$$

设 $y = g(x)$, 并利用换元 $dy = g'(x) dx$, 则积分变为:

$$\int_{g(c-\epsilon)}^{g(c+\epsilon)} \delta(y) \frac{dy}{g'(x)} \quad (9.61)$$

由于 $g(c) = 0$, 当 $g'(c) > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ 内单调递增, $g(c - \epsilon) < 0$ 且 $g(c + \epsilon) > 0$, 所以:

$$\int_a^b \delta(g(x)) dx = \frac{1}{g'(x)} \Big|_{y=0} = \frac{1}{g'(c)}. \quad (9.62)$$

当 $g'(c) < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ 内单调递减, $g(c - \epsilon) > 0$ 且 $g(c + \epsilon) < 0$, 需要翻转积分上下限:

$$\int_a^b \delta(g(x)) dx = - \frac{1}{g'(x)} \Big|_{y=0} = - \frac{1}{g'(c)}. \quad (9.63)$$

因此, 我们可以总结为:

$$\int_a^b \delta(g(x)) dx = \frac{1}{|g'(c)|}. \quad (9.64)$$

定理 9.4 若函数 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内有 n 个不同的零点 $\{c_k\}_{k=1}^n$, 且在这些零点处 $g'(c_k) \neq 0$, 则狄拉克 δ 函数满足以下性质:

$$\delta(g(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - c_k)}{|g'(c_k)|}. \quad (9.65)$$

例 9.7 计算如下积分:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t^2 - a^2) dt, \quad (9.66)$$

其中 $f(t)$ 为平滑函数, a 为实常数。

解: 首先, 我们将 δ 函数的参数表示为 $g(t) = t^2 - a^2$, 该函数的零点为:

$$c_1 = -a, \quad c_2 = a. \quad (9.67)$$

计算其导数:

$$g'(t) = 2t. \quad (9.68)$$

根据定理 9.65, δ 函数的变换公式为:

$$\delta(t^2 - a^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{\delta(t - c_k)}{|g'(c_k)|}. \quad (9.69)$$

代入具体数值:

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{\delta(t + a)}{|2a|} + \frac{\delta(t - a)}{|2a|} = \frac{1}{2|a|} \{\delta(t + a) + \delta(t - a)\}. \quad (9.70)$$

将其代入积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t^2 - a^2) dt \\ &= \frac{1}{2|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \{\delta(t + a) + \delta(t - a)\} dt \\ &= \frac{1}{2|a|} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t + a) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - a) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2|a|} \{f(-a) + f(a)\}. \end{aligned} \quad (9.71)$$

注意 若 $f(t)$ 为奇函数, 即 $f(-a) = -f(a)$, 则积分结果为零。

例 9.8 计算如下积分:

$$I = \int_1^{\infty} \sin t \delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) dt. \quad (9.72)$$

解: 设 $g(t) = t^2 - \frac{\pi^2}{4}$, 求解 $g(t) = 0$ 得到两个根:

$$c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = -\frac{\pi}{2}. \quad (9.73)$$

其中, 只有 c_1 位于积分区间 $[1, \infty]$ 内。计算导数:

$$g'(t) = 2t. \quad (9.74)$$

根据定理 9.65, 我们可以将 δ 函数展开:

$$\delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \sum_{k=1}^2 \frac{\delta(t - c_k)}{|g'(c_k)|}. \quad (9.75)$$

对于 c_1 , 有:

$$\delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\delta(t - \pi/2)}{|2(\pi/2)|} = \frac{\delta(t - \pi/2)}{\pi}. \quad (9.76)$$

将其代入积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \sin t \delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) dt \\ &= \int_1^\infty \sin t \cdot \frac{\delta(t - \pi/2)}{\pi} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

另一方面, 若积分范围为整个实数轴:

$$I = \int_{-\infty}^\infty \sin t \delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) dt, \quad (9.78)$$

由于 $c_1 = \frac{\pi}{2}$ 和 $c_2 = -\frac{\pi}{2}$ 均在积分范围内, 而 $\sin(-t) = -\sin t$, 两者贡献相互抵消, 因此:

$$I = 0. \quad (9.79)$$

例 9.9 考虑以下定义的函数 $D_T(x - x_0)$:

$$D_T(x - x_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{i(x-x_0)t} dt. \quad (9.80)$$

该积分可以直接计算, 得到:

$$D_T(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(x-x_0)t}}{i(x-x_0)} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{\pi} \frac{\sin T(x-x_0)}{x-x_0}. \quad (9.81)$$

图 88 展示了不同 T 值下的 $D_T(x)$ 作为 x 的函数的图像。注意, 随着 T 增大, 曲线的宽度变小。我们可以计算其积分:

$$\int_{-\infty}^\infty D_T(x - x_0) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin T(x-x_0)}{x-x_0} dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin y}{y} dy}_{=\pi} = 1. \quad (9.82)$$

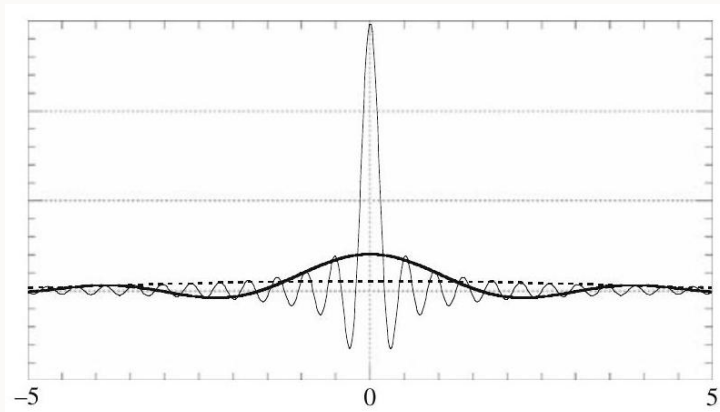


图 88: $\frac{\sin Tx}{x}$ 逼近狄拉克 δ 分布。虚线对应 $T = 0.5$, 粗实线对应 $T = 2$, 细实线对应 $T = 15$ 。

由图 88 可见, 当 T 越来越大时, $D_T(x - x_0)$ 趋近于狄拉克 δ 函数, 即:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} D_T(x - x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin T(x - x_0)}{x - x_0}. \quad (9.83)$$

为了说明这一点, 我们注意到对于有限的 T , 可以写为:

$$D_T(x - x_0) = \frac{T \sin T(x - x_0)}{\pi T(x - x_0)}. \quad (9.84)$$

进一步地, 当 x 非常接近 x_0 时,

$$T(x - x_0) \rightarrow 0, \quad \text{且} \quad \frac{\sin T(x - x_0)}{T(x - x_0)} \rightarrow 1. \quad (9.85)$$

这意味着 $D_T(x - x_0) \approx (T/\pi)$, 在 T 较大时其值很大, 这符合 δ 函数的特性: $\delta(0) = \infty$ 。另一方面, $D_T(x - x_0)$ 在 x_0 处的宽度大致由其值降至零的点间距给出:

$$T(x - x_0) = \pm\pi, \quad \text{或} \quad x - x_0 = \pm\frac{\pi}{T}. \quad (9.86)$$

这说明其宽度约为 $\Delta x = 2\pi/T$, 随着 T 增大而趋于零, 再次符合 δ 函数的特性。因此, 从 (9.80) 和 (9.83) 可得 δ 函数的一个重要表示:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x_0)t} dt. \quad (9.87)$$

9.2.2 阶跃函数

定义 9.3 阶跃函数 (step function) $\theta(x)$ 定义为:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (9.88)$$

阶跃函数在描述具有不连续点或尖点的函数时非常有用。例如, 绝对值函数可以用 $\theta(x)$ 表示:

$$|x| = x\theta(x) - x\theta(-x), \quad (9.89)$$

或更一般地:

$$|x - y| = (x - y)[\theta(x - y) - \theta(y - x)]. \quad (9.90)$$

此外, 分段连续函数, 例如:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & 0 < x < 1 \\ g_2(x), & x > 1 \end{cases} \quad (9.91)$$

可以重写为:

$$g(x) = g_1(x)\theta(x)\theta(1-x) + g_2(x)\theta(x-1). \quad (9.92)$$

定理 9.5 阶跃函数 $\theta(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数趋于无穷大:

$$\theta'(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\theta(\epsilon) - \theta(-\epsilon)}{2\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{2\epsilon} \rightarrow \infty. \quad (9.93)$$

因此, 我们可以将 $\theta(x)$ 的导数与狄拉克 δ 函数联系起来:

$$\delta(x - x_0) = \theta'(x - x_0). \quad (9.94)$$

证明: 考虑阶跃函数 $\theta(x - x_0)$:

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \quad (9.95)$$

其导数 $\theta'(x - x_0)$ 仅在 $x = x_0$ 处非零。因此, 对于任意良好定义的函数 $f(x)$, 我们计算:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x - x_0)dx &= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\theta'(x - x_0)dx \\ &\approx f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \theta'(x - x_0)dx \\ &= f(x_0)[\theta(\epsilon) - \theta(-\epsilon)] \\ &= f(x_0)[1 - 0] = f(x_0). \end{aligned} \quad (9.96)$$

这与狄拉克 δ 函数的定义一致, 因此得到

$$\delta(x - x_0) = \theta'(x - x_0). \quad (9.97)$$

例 9.10 对于正数 a , 函数 $\tanh(ax)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 1, 在 $x \rightarrow -\infty$ 时趋于 -1, 并在两者之间平滑过渡。随着 a 增大, 过渡变得越来越陡峭。这引出了以下关系:

$$\theta(x - x_0) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \{1 + \tanh[a(x - x_0)]\}. \quad (9.98)$$

解： 定义 $\theta_a(x - x_0)$ 为右侧函数在任意有限正数 a 下的形式，则：

$$\theta'_a(x - x_0) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{1 + \tanh[a(x - x_0)]\} = \frac{a \operatorname{sech}^2[a(x - x_0)]}{2}. \quad (9.99)$$

计算积分：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta'_a(x - x_0) dx &= \theta_a(x - x_0)|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \{1 + \tanh[a(x - x_0)]\} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (9.100)$$

该等式对任意 $a > 0$ 成立，特别是当 $a \rightarrow \infty$ 时。因此，我们得到狄拉克 δ 函数的另一种表示形式：

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \theta'_a(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a \operatorname{sech}^2[a(x - x_0)]}{2}. \quad (9.101)$$

例 9.11 (阶跃函数的围道积分表示) 证明以下围道积分表示阶跃函数：

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon} \quad (9.102)$$

解： 我们将 ω -积分视为复平面上的闭合路径积分（见图 89）。被积函数在 $\omega = -i\varepsilon$ 处具有一个一阶极点。

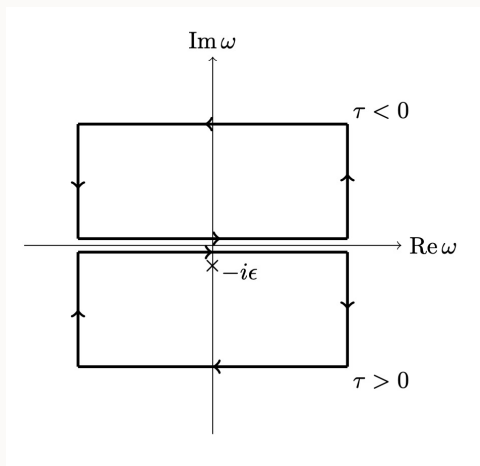


图 89: 积分路径： $\tau < 0$ 和 $\tau > 0$ 的情况

情况 1: $\tau < 0$ 当 $\tau < 0$ 时，我们在复平面的上半平面闭合积分路径，因为在该区域的无穷远处积分贡献消失。令 $\omega = \varrho e^{i\phi}$ ，则被积函数可写为：

$$f(\varrho, \phi) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega} = \frac{e^{-i\varrho\tau(\cos\phi + i\sin\phi)}}{\varrho e^{i\phi}} = e^{-i\varrho\tau \cos\phi} \frac{e^{+\varrho\tau \sin\phi}}{\varrho e^{i\phi}} \quad (9.103)$$

对于 $\tau < 0$ ，在无穷远上半圆的积分贡献满足：

$$|f(\varrho, \phi)| = \frac{e^{-\varrho|\tau|\sin\phi}}{\varrho} \rightarrow 0 \quad (\varrho \rightarrow \infty) \quad (9.104)$$

由柯西定理, 由于极点不在封闭积分路径内部, 整个积分值为零, 即:

$$\Theta(\tau < 0) = 0 \quad (9.105)$$

情况 2: $\tau > 0$ 当 $\tau > 0$ 时, 我们采用下半平面封闭路径, 并使用 Cauchy 积分定理计算围道积分。由于积分路径的方向为顺时针, 因此计算留数时会出现额外的负号。计算被积函数在 $\omega = -i\varepsilon$ 处的留数:

$$\Theta(\tau > 0) = -\frac{1}{2\pi i}(-1)2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Res} \left[\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon} \right]_{\omega = -i\varepsilon} \quad (9.106)$$

计算留数:

$$\text{Res} \left[\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon} \right]_{\omega = -i\varepsilon} = e^{-i\omega\tau} \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (9.107)$$

最终得出:

$$\Theta(\tau > 0) = 1 \quad (9.108)$$

可以验证

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon} d\omega = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\omega}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = \delta(\tau). \end{aligned} \quad (9.109)$$

9.2.3 多维狄拉克 δ 函数

我们可以将一维狄拉克 δ 函数推广到多维空间。在二维空间中, 狄拉克 δ 函数的定义为:

定义 9.4 二维狄拉克 δ 函数定义为:

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \delta(\mathbf{0}) \equiv \delta(0, 0) = \infty, & \text{如果 } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (9.110)$$

二维狄拉克 δ 函数在除 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 以外的所有点上均为零, 而在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ 处趋于无穷大。

定理 9.6 在极坐标系中, 二维狄拉克 δ 函数可以表示为:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (9.111)$$

定理 9.7 设 Ω 是 xy -平面上的一个区域, P_0 是其中的一个点, 则有:

$$\iint_{\Omega} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx dy = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) \equiv f(x_0, y_0), & \text{若 } P_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (9.112)$$

其中, (x_0, y_0) 是 P_0 的笛卡尔坐标。

定义 9.5 三维狄拉克 δ 函数在所有参数均为零的点处取无穷大，在其他所有位置均为零。

在笛卡尔坐标系中，该函数的表达式为：

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0).\end{aligned}\quad (9.113)$$

在柱坐标系中，其表达式为：

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0). \quad (9.114)$$

在球坐标系中，该函数可写为：

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (9.115)$$

定理 9.8 三维狄拉克 δ 函数满足以下体积分性质：

$$\iiint_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} 1, & \text{若 } P_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (9.116)$$

其中 Ω 是三维空间中的一个区域， P_0 是一个点，具有笛卡尔坐标 (x_0, y_0, z_0) ，球坐标 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ ，以及柱坐标 (ρ_0, φ_0, z_0) 。

此外，对于任意“良好”函数 $f(\mathbf{r})$ ，我们有：

$$\iiint_{\Omega} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0), & \text{若 } P_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (9.117)$$

这表明积分的结果等于函数 f 在点 P_0 处的值，从而简化了积分计算。

例 9.12 计算一维无限离子晶体在笛卡尔坐标系中的静电场。假设电荷分布在 z 轴上（见图 90）。我们将其视为三维电荷分布，其体电荷密度为：

$$\rho_q(x, y, z) = q \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x) \delta(y) \delta(z - ka). \quad (9.118)$$

三个 δ 函数分别将电荷限制在 z 轴上并定位各个电荷。静电场的计算基于：

$$E_x(x, y, z) = k_e \iiint_{\Omega} \frac{\rho_q(x', y', z') (x - x') dx' dy' dz'}{\left\{ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}}. \quad (9.119)$$

其中 $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ，由于 δ 函数会自动限制积分区域，我们可以取 Ω 为整个空间。此外，可选择坐标系使得场点位于 xz 平面，即令 $y = 0$ 。将 ρ_q 代入积分：

$$E_x(x, y, z) = k_e q \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \iiint_{\Omega} \frac{(x - x') \delta(x') \delta(y') \delta(z' - ka) dx' dy' dz'}{\left\{ (x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2 \right\}^{3/2}}. \quad (9.120)$$

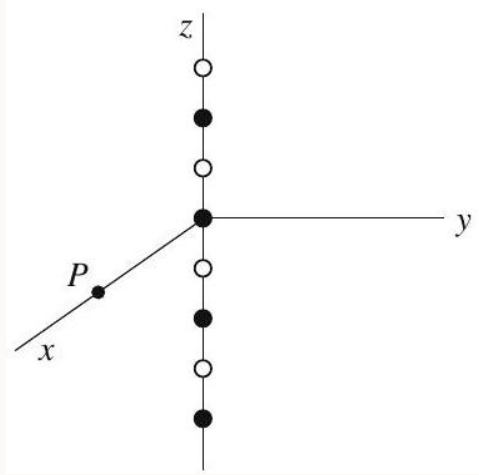


图 90: 计算一维离子晶体静电场的几何示意图。

利用 δ 函数的积分性质 (参考 (9.117)), 我们注意到:

$$f(x', y', z') = \frac{(x - x')}{\{(x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2\}^{3/2}}. \quad (9.121)$$

积分的结果是 f 在 $x' = 0, y' = 0, z' = ka$ 处的取值, 因此我们得到:

$$E_x(x, y, z) = k_e q \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{\{x^2 + (z - ka)^2\}^{3/2}}. \quad (9.122)$$

将求和拆分成三部分:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) = & k_e q \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k \frac{x}{\{x^2 + (z - ka)^2\}^{3/2}} \\ & + k_e q \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} + k_e q \sum_{k=+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{\{x^2 + (z - ka)^2\}^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9.123)$$

由于求和是收敛的, 我们可以通过对第一项换元 $k \rightarrow -k$ 进行合并:

$$(-1)^{-k} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k. \quad (9.124)$$

因此, 最终得到:

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, z) = & k_e q \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \\ & + k_e q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{\{x^2 + (z + ka)^2\}^{3/2}} + \frac{x}{\{x^2 + (z - ka)^2\}^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (9.125)$$

类似地, 计算电场的其他分量:

$$\begin{aligned} E_y(x, 0, z) &= 0, \\ E_z(x, 0, z) &= k_e q \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$+ k_e q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z + ka}{\{x^2 + (z + ka)^2\}^{3/2}} + \frac{z - ka}{\{x^2 + (z - ka)^2\}^{3/2}} \right). \quad (9.126)$$

当 $z = 0$ 时, 进一步简化:

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= k_e q \frac{x}{|x|^3} + 2k_e q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x}{(x^2 + k^2 a^2)^{3/2}}, \\ E_y(x, 0, 0) &= 0, \\ E_z(x, 0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.127)$$

在 $x = a$ 处, 场强数值计算为:

$$E_x(a, 0, 0) = \frac{k_e q}{a^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1 + k^2)^{3/2}} \right\} = 0.42746 \frac{k_e q}{a^2}. \quad (9.128)$$

其中, 级数的数值计算 (精确至六位小数) 通过求和前 150 项得到。

9.3 傅里叶变换

定义 9.6 (积分变换) 一个函数 $v(t)$ 积分变换为另一个函数 $u(x)$ 的定义如下:

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)v(t)dt \quad (9.129)$$

其中, (a, b) 是一个适当的区间, $K(x, t)$ 被称为积分变换的核函数 (kernel), 它是两个变量的函数。

定义 9.7 傅里叶变换的核函数傅里叶变换的核函数形式为:

$$K(x, t) = e^{-itx} \quad (9.130)$$

其积分区间为 $(-\infty, +\infty)$ 。

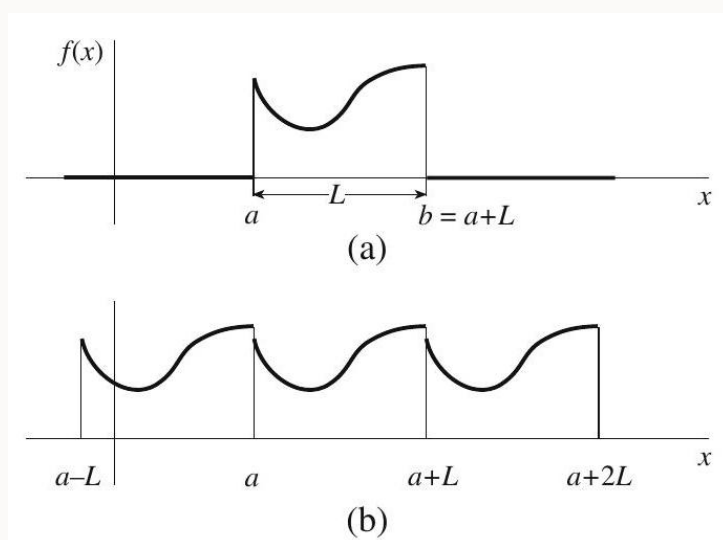


图 91: (a) 需要表示的函数。(b) 其傅里叶级数表示导致的周期性重复。

我们知道只要函数 $F(x)$ 是周期性的, 其傅里叶级数表示在整个实轴上有效。然而, 在物理应用中, 大多数函数仅在某个区间 (a, b) 上定义, 并且在该区间之外不进行重复。因此, 我们希望能够将这些函数也展开成某种形式的傅里叶“级数”。

一种实现方法是从周期性傅里叶级数出发, 然后让周期趋于无穷大, 同时扩展函数的定义域。例如, 假设我们要表示一个仅在区间 (a, b) 内定义的函数 $f(x)$, 并规定它在其他地方取零, 如图 91(a) 所示。

如果直接尝试傅里叶级数展开, 该方法会导致函数的周期性重复, 如图 91(b) 所示。这种重复可能在某些应用场景下是不希望的, 因此需要寻求其他方法来处理这种情况。

为了消除傅里叶级数展开导致的周期性重复, 我们引入一个参数 Λ , 定义一个新的函数 $f_\Lambda(x)$ 作为扩展:

$$f_{\Lambda}(x) = \begin{cases} 0, & a - \Lambda/2 < x < a, \\ f(x), & a < x < b, \\ 0, & b < x < b + \Lambda/2. \end{cases} \quad (9.131)$$

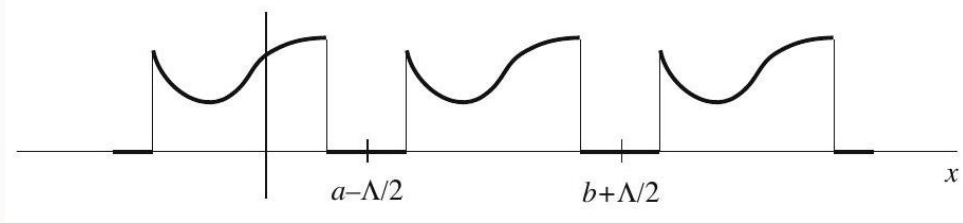


图 92: 通过引入参数 Λ , 我们成功地将函数的周期性副本分离开来。

如图 92 所示, 这个函数的傅里叶级数展开为:

$$f_{\Lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{L + \Lambda}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\Lambda,n} e^{2i\pi n x / (L + \Lambda)} \quad (9.132)$$

其中系数 $f_{\Lambda,n}$ 由以下积分定义:

$$f_{\Lambda,n} = \frac{1}{\sqrt{L + \Lambda}} \int_{a-\Lambda/2}^{b+\Lambda/2} e^{-2i\pi n x / (L + \Lambda)} f_{\Lambda}(x) dx \quad (9.133)$$

通过引入参数 Λ , 我们成功地将原函数的多个周期性副本彼此分离。如果令 $\Lambda \rightarrow \infty$, 我们可以完全孤立出函数 $f(x)$, 避免重复。

观察式 (9.132) 和 (9.133) 在 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时的行为, 我们定义 k_n 为:

$$k_n := \frac{2n\pi}{L + \Lambda} \quad (9.134)$$

在 Λ 充分大时, n 改变一个单位, k_n 仅有微小改变, 即 k_n 变化趋于连续, k_n 可近似为连续变量。这表明在 (9.132) 的求和式中, 可以对 n 进行分区间合并, 得到黎曼和:

$$f_{\Lambda}(x) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f_{\Lambda}(k_j)}{\sqrt{L + \Lambda}} e^{ik_j x} \Delta n_j \quad (9.135)$$

其中 k_j 对应第 j 个 bin 的值, Δn_j 计数了第 j 个 bin 中 n 求和的个数。 $f_{\Lambda}(k_j) := f_{\Lambda,n_j}$, 并且 Δn_j 由下式给出:

$$\Delta n_j = \frac{L + \Lambda}{2\pi} \Delta k_j \quad (9.136)$$

代入上述关系, 我们得到:

$$f_{\Lambda}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\Lambda}(k_j) e^{ik_j x} \Delta k_j \quad (9.137)$$

其中定义 $\tilde{f}_{\Lambda}(k_j)$ 为:

$$\tilde{f}_{\Lambda}(k_j) = \sqrt{\frac{L + \Lambda}{2\pi}} f_{\Lambda}(k_j) \quad (9.138)$$

在 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的极限下, 傅里叶级数过渡为傅里叶积分变换, 得到:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (9.139)$$

其中傅里叶变换 $\tilde{f}(k)$ 由下式定义:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (9.140)$$

方程 (9.139) 表示傅里叶逆变换, (9.140) 表示傅里叶变换。值得注意的是, 这两个变换的唯一区别在于积分核中的指数符号不同。

定义 9.8 另一种常见的傅里叶变换记号是 $\mathcal{F}[f]$, 其逆变换记作 $\mathcal{F}^{-1}[g]$ 。这意味着, 傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 在 k 处的值由以下积分给出:

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (9.141)$$

类似地, 傅里叶逆变换 $\mathcal{F}^{-1}[g]$ 在 x 处的值由以下积分定义:

$$\mathcal{F}^{-1}[g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad (9.142)$$

例 9.13 计算函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $\tilde{f}(\omega)$ 并验证傅里叶反演公式, 其中

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (9.143)$$

其中 $a > 0$ 。

解:

计算傅里叶变换 计算 $\tilde{f}(\omega)$ 相对简单, 对于 $a > 0$, 我们有:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (9.144)$$

由 $f(t)$ 的定义, 该积分变为:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt. \quad (9.145)$$

计算该积分:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega}, \quad (\text{注意 } a > 0). \quad (9.146)$$

验证傅里叶反演公式 定义

$$g(z) = \frac{1}{a+iz}. \quad (9.147)$$

注意到 $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\omega)$, 并且对于较大的 $|z|$, 满足 $|g(z)| < \frac{M}{|z|}$ 。

我们分别讨论 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的情况进行验证。

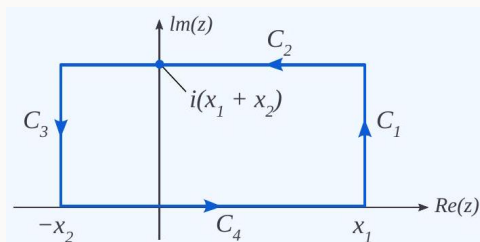


图 93: 标准围道

情况 1: $t > 0$ 使用标准围道 (图 93)。

根据定理 6.6, 我们有:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2+C_3} g(z)e^{izt} dz = 0. \quad (9.148)$$

同时,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_4} g(z)e^{izt} dz = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (9.149)$$

唯一的极点出现在 $z = ia$, 它位于上半平面。利用留数定理, 应用于整个封闭围道, 我们得到:

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} g(z)e^{izt} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{izt}}{a + iz}, ia \right) = 2\pi e^{-at}. \quad (9.150)$$

结合上述结果, 我们得出:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) d\omega = e^{-at}, \quad \text{for } t > 0. \quad (9.151)$$

这验证了傅里叶反演公式在 $t > 0$ 时成立。

情况 2: $t < 0$ 在 $t < 0$ 的情况下, 我们使用另一条围道 (图 94)。

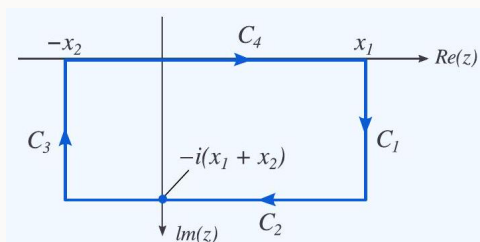


图 94: 用于 $t < 0$ 的围道

根据定理 6.6, 我们有:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2+C_3} g(z)e^{izt} dz = 0. \quad (9.152)$$

同时,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_4} g(z)e^{izt} dz = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) d\omega. \quad (9.153)$$

由于 $g(z)e^{izt}$ 在下半平面没有极点, 应用留数定理于整个封闭围道, 我们得到:

$$\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} g(z)e^{izt} dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{izt}}{a+iz}, ia\right) = 0. \quad (9.154)$$

因此,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) d\omega = 0, \quad \text{for } t < 0. \quad (9.155)$$

这验证了傅里叶反演公式在 $t < 0$ 时成立。

傅里叶反演积分的收敛性说明 最后, 我们来讨论一下傅里叶反演积分收敛。根据定义:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - i\omega \cos(\omega t) + ia \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (9.156)$$

其中, 分子中不含 ω 的项由于分母 ω^2 的存在, 积分绝对收敛。而分子中含有 ω 的项并不绝对收敛。例如:

$$\frac{\omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} \quad (9.157)$$

其衰减行为类似于 $1/\omega$, 因此它的积分不是绝对收敛的。

然而, 我们可以证明该积分是条件收敛的, 即:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} \frac{\omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{和} \quad \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 \frac{\omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2} d\omega \quad (9.158)$$

的极限存在且有限。

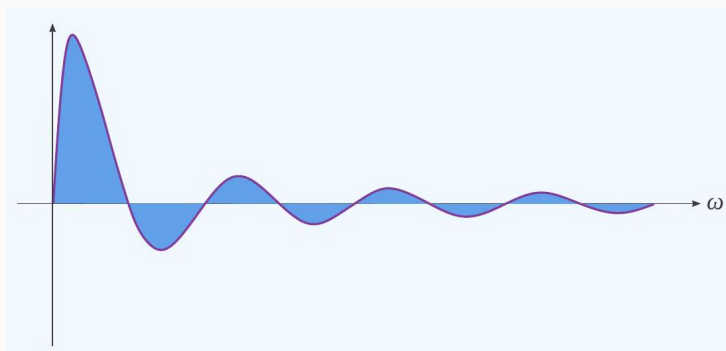


图 95: 总面积围绕某个极限值振荡, 且振荡幅度随 ω 递减

关键论证

- 由于 $\sin(\omega t)$ 在 ω 轴上交替变化, 其正负区域的面积相互抵消。
- 另一方面, $\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$ 作为一个函数, 单调递减, 因此其贡献的面积逐渐减少。
- 这意味着随着 R_1 和 R_2 变大, 曲线下的总面积会围绕某个极限值振荡, 并且振荡幅度递减, 最终收敛到某个有限值。

因此, 我们可以得出结论: 傅里叶反演积分尽管不是绝对收敛的, 但它是条件收敛的, 从而保证了傅里叶反演公式的正确性。

9.3.1 傅里叶变换的性质

方程 (9.139) 和 (9.140) 互为逆变换。然而, 它们的一致性并非显然。换句话说, 如果我们将方程 (9.139) 代入 (9.140) 的右侧, 是否能得到恒等式? 让我们来检验:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k') e^{ik'x} dk' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k') e^{i(k'-k)x} dk'\end{aligned}\quad (9.159)$$

我们现在交换两个积分的次序:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \right]. \quad (9.160)$$

方括号中的表达式是狄拉克 δ 函数. 因此, 我们得到

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k') \delta(k' - k), \quad (9.161)$$

这就是恒等式。用 $\mathcal{F}$ 记号表示, 该结果可写为:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f \quad (9.162)$$

对于任意函数 f , 第二个恒等式可通过类似的方法证明。

线性运算 傅里叶变换及其逆变换具有线性性质。若 a 和 b 为常数, f 和 g 为函数, 则有:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g], \quad \mathcal{F}^{-1}[af + bg] = a\mathcal{F}^{-1}[f] + b\mathcal{F}^{-1}[g]. \quad (9.163)$$

高维傅里叶变换 傅里叶变换可以推广到更高维度。这一推广是直接的, 其定义如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](\mathbf{r}) &:= f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_{\infty}^k} d^n k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}), \\ \mathcal{F}[f](\mathbf{k}) &:= \tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_{\infty}^x} d^n x f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (9.164)$$

其中, n 通常取 2 或 3, Ω_{∞}^k 代表整个 k -空间, 而 Ω_{∞}^x 代表整个 x -空间。

9.3.2 正弦变换与余弦变换

在傅里叶变换的定义或其逆变换中, 复指数部分可以分解为三角函数部分。对于偶函数, 仅余弦项有贡献, 而对于奇函数, 仅正弦项有贡献。此外, 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 可化为 $2\int_0^{\infty}$, 从而导出正弦

变换和余弦变换，分别记为 $\mathcal{F}_s[f]$ 和 $\mathcal{F}_c[f]$ ：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f](k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin kx dx, \\ \mathcal{F}_c[f](k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos kx dx.\end{aligned}\tag{9.165}$$

求余弦变换的逆变换 设 $f(x)$ 是方程 (9.165) 中余弦变换的函数。两边乘以 $\cos k'x$ (其中 $k' > 0$)，并对所有正 x 取积分：

$$\int_0^\infty f(x) \cos k'x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}(k) dk \int_0^\infty \cos kx \cos k'x dx.\tag{9.166}$$

将余弦函数用指数函数表示，则右侧的 x 积分为：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos kx \cos k'x dx &= \frac{1}{4} \int_0^\infty (e^{ikx} + e^{-ikx}) (e^{ik'x} + e^{-ik'x}) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty [e^{ix(k+k')} + e^{-ix(k+k')} + e^{ix(k-k')} + e^{-ix(k-k')}] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty e^{ix(k+k')} dx + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty e^{ix(k-k')} dx \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(k+k') + \delta(k-k')].\end{aligned}\tag{9.167}$$

在第二行到第三行的转换中，我们使用了 $\int_0^\infty e^{-iax} dx = \int_{-\infty}^0 e^{iax} dx$ ；而在第三行到最后一行的转换中，我们使用了狄拉克 δ 函数的性质。

将结果 (9.167) 代入 (9.166)，得到：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x) \cos k'x dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \tilde{f}(k) \delta(k+k') dk + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \tilde{f}(k) \delta(k-k') dk \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{f}(k').\end{aligned}\tag{9.168}$$

因此，我们得到了余弦变换：

$$\tilde{f}(k') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos k'x dx.\tag{9.169}$$

正弦变换 类似地，可以证明正弦变换的逆变换也是正弦变换，我们在此省略详细推导。

总结 正弦变换与余弦变换的逆变换仍然是正弦变换与余弦变换。这一特性表明，在需要仅处理偶函数或奇函数的情形下，正弦变换与余弦变换可以作为傅里叶变换的特例使用。然而，在实际应用中，傅里叶变换（以指数函数形式表示）通常更加方便，因此我们不再进一步使用正弦或余弦变换。

例 9.14 让我们计算如下函数的傅里叶变换：

$$f(x) = \begin{cases} b, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}\tag{9.170}$$

(见图 96)。根据公式 (9.140)，我们有

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{ka}. \quad (9.171)$$

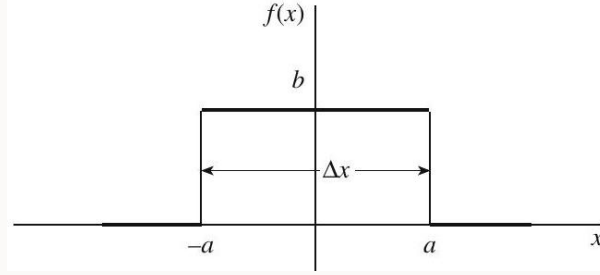


图 96: 方形“脉冲”函数。

极限讨论 首先，若令 $a \rightarrow \infty$ ，则 $f(x)$ 变为整个实轴上的常函数，此时傅里叶变换为：

$$\tilde{f}(k) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ka}{k} = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \pi \delta(k). \quad (9.172)$$

这表明常函数的傅里叶变换是狄拉克 δ 函数。

其次，若令 $b \rightarrow \infty$ 且 $a \rightarrow 0$ ，使得 $2ab = 1$ ，则 $f(x)$ 逼近 δ 函数，傅里叶变换变为：

$$\tilde{f}(k) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{ka} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin ka}{ka} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (9.173)$$

这说明 δ 函数的傅里叶变换是常数 $1/\sqrt{2\pi}$ 。

不确定性关系 $f(x)$ 的宽度为 $\Delta x = 2a$ ，而 $\tilde{f}(k)$ 的宽度近似为其前两个零点间的距离：

$$\Delta k = k_+ - k_- = \frac{2\pi}{a}. \quad (9.174)$$

即， $f(x)$ 越宽，其傅里叶变换 $\tilde{f}(k)$ 越窄。极限情况下，若 $f(x)$ 具有无限宽度（常函数），则其傅里叶变换趋于 δ 函数。

这一性质是普遍的，可以证明：

$$\Delta x \Delta k \geq 1. \quad (9.175)$$

当两边乘以约化普朗克常数 $\hbar = h/(2\pi)$ ，可得到著名的海森堡不确定性关系：

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (9.176)$$

其中 $p = \hbar k$ 为粒子的动量。

¹⁵在量子力学中， $g(x)$ 的宽度，即所谓的“波包”，表示量子力学中粒子位置 x 的不确定性。同样地，傅里叶变换 $\tilde{g}(k)$ 的宽度表示动量 p 的不确定性，其中 $p = \hbar k$ 。

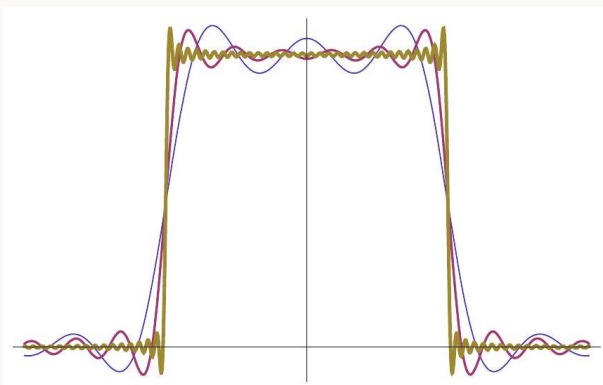


图 97: 积分收敛性分析。最细曲线对应 $K = 10$, 中等曲线对应 $K = 20$, 最粗曲线对应 $K = 100$ 。

傅里叶逆变换 $f(x)$ 可由其傅里叶变换 $\tilde{f}(k)$ 通过傅里叶逆变换恢复:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk. \quad (9.177)$$

图 97 显示了积分

$$\frac{b}{\pi} \int_{-K}^K \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk \quad (9.178)$$

在不同的 K 值下的收敛情况。随着 K 的增大, 所得曲线逐渐逼近图 96 所示的方形脉冲函数。

例 9.15 计算高斯函数 $g(x) = ae^{-bx^2}$ (其中 $a, b > 0$) 的傅里叶变换:

$$\tilde{g}(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x^2 + ikx/b)} dx. \quad (9.179)$$

我们可以将被积函数指数中的二次项重写, 并利用变量替换 $y = x + ik/(2b)$, 得到:

$$\tilde{g}(k) = \frac{ae^{-k^2/4b}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy. \quad (9.180)$$

使用高斯积分的标准结果:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}, \quad (9.181)$$

我们最终得到高斯函数的傅里叶变换:

$$\tilde{g}(k) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-k^2/(4b)}. \quad (9.182)$$

不确定性关系 值得注意的是, $g(x)$ 的宽度与 $1/\sqrt{b}$ 成正比, 而 $\tilde{g}(k)$ 的宽度与 $\sqrt{b}$ 成正比。因此, 我们得到不确定性关系:

$$\Delta x \Delta k \sim 1. \quad (9.183)$$

例 9.16 (汤川势 (Yukawa potential)) 计算点电荷 q 在原点的库仑势 $V(r) = \frac{k_e q}{r}$ 的傅里叶变换在散射实验 (如原子、分子和固体的散射) 中非常重要。然而, 库仑势的傅里叶变换并没有严格定义。因此, 我们引入 Yukawa 势:

$$V_\alpha(r) = \frac{k_e q e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha > 0, \quad (9.184)$$

其傅里叶变换是良定义的，并且我们可以在 $\alpha \rightarrow 0$ 时恢复库仑势。

在三维空间中，傅里叶变换表示为：

$$\tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iint_{\Omega_\infty} d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{k_e q e^{-\alpha r}}{r}. \quad (9.185)$$

由于积分中出现 r ，使用球坐标是合适的。我们选取 $\mathbf{k}$ 沿着 z 轴的方向，即令 $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_z$ ，则有

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta. \quad (9.186)$$

转换到球坐标后，积分表达式变为：

$$\tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{k_e q}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \theta} \frac{e^{-\alpha r}}{r}. \quad (9.187)$$

其中 φ 积分显然为 2π 。对 θ 进行积分，令 $u = \cos \theta$ ，则：

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} d\theta = \int_{-1}^1 e^{-ikru} du = \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}). \quad (9.188)$$

因此，

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) &= \frac{k_e q (2\pi)}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= \frac{k_e q}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{ik} \int_0^\infty dr [e^{(-\alpha+ik)r} - e^{-(\alpha+ik)r}] \\ &= \frac{k_e q}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{ik} \left(\left. \frac{e^{(-\alpha+ik)r}}{-\alpha+ik} \right|_0^\infty + \left. \frac{e^{-(\alpha+ik)r}}{\alpha+ik} \right|_0^\infty \right). \end{aligned} \quad (9.189)$$

注意，因子 $e^{-\alpha r}$ 使得 $r \rightarrow \infty$ 处的指数项收敛，这正是我们引入它的原因。最终计算结果为：

$$\tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{2k_e q}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 + \alpha^2}. \quad (9.190)$$

参数 α 控制势的作用范围， α 越大，势的作用范围越小。实际上，Yukawa 在研究短程核力时引入了 α 。对于电磁相互作用，势的作用范围是无限的，因此 $\alpha = 0$ ，从而 Yukawa 势退化为库仑势：

$$\tilde{V}_{\text{Coul}}(\mathbf{k}) = \frac{2k_e q}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2}. \quad (9.191)$$

当涉及电荷分布时，傅里叶变换的结果将会有所不同，如下一个例子所示。

例 9.17 考虑电荷分布在有限体积中的情况，其电势可表示为：

$$V(\mathbf{r}) = \iiint \frac{k_e q \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3x' = k_e q \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3x', \quad (9.192)$$

其中 $\rho(\mathbf{r}')$ 表示电荷密度，并且我们归一化 $\rho(\mathbf{r}')$ 使其体积分等于 1。图 98 显示了相关几何关系。

通过变量替换 $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ，即 $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ ，并令 $d^3x' = d^3X$ ，则傅里叶变换为：

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} k_e q \int \frac{\rho(\mathbf{R} + \mathbf{r})}{R} d^3X. \quad (9.193)$$

为了计算方程(9.193)，使用 $\rho(\mathbf{R} + \mathbf{r})$ 的傅里叶变换表示：

$$\rho(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{r})}. \quad (9.194)$$

将(9.194)代入(9.193)，可得：

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}) &= \frac{k_e q}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3X d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}}}{R} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \\ &= k_e q \int d^3X d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}}}{R} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \right)}_{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \\ &= k_e q \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \int d^3X \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{R}. \end{aligned} \quad (9.195)$$

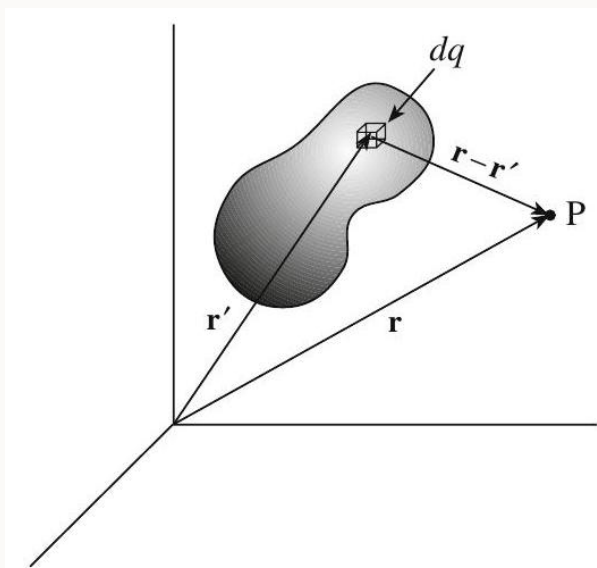


图 98: 连续电荷分布在点 P 处的电势的逆傅里叶变换计算几何示意图。

该结果的一个显著特性是电荷分布 $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ 被完全因子化出来。此外，式(9.195)的积分部分（除去常数和 $\mathbf{k}$ 的符号变化）与前例中的点电荷库仑势的逆傅里叶变换一致。因此，我们可以将其写为：

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{3/2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \tilde{V}_{\text{Coul}}(-\mathbf{k}) = \frac{4\pi k_e q \tilde{\rho}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (9.196)$$

应用：傅里叶变换与夸克的发现 方程(9.196)在分析粒子的微观结构时具有重要意义。傅里叶变换 $\tilde{V}(\mathbf{k})$ 在散射实验中是直接可测的。在典型的实验中，使用带电点粒子（如电子）探测带电目标。如果 $\tilde{V}(\mathbf{k})$ 的行为偏离 $1/k^2$ ，则可以得出目标粒子具有电荷分布的结论。

更具体地说，绘制 $k^2 \tilde{V}(\mathbf{k})$ 与 k 的关系曲线，可以观察 $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ （即形状因子，form factor）如何随 k 变化。如果该图像为常数，则 $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ 也是常数，表明目标是点粒子（对于点粒子， $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ 是常数，因为 $\rho(\mathbf{r}') \propto \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ）。如果 $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ 依赖于 k ，则目标粒子具有非零的电荷分布。

这种方法推广到四维相对论时，为 1968 年斯坦福直线加速器中心（SLAC）电子散射实验提供了有力的证据，揭示了质子内部存在点状粒子（即夸克）。实验发现，质子的形状因子随着 k 变化，不再是常数，从而支持了部分子（夸克）模型。

9.4 傅里叶变换的在求解微分方程中的应用

傅里叶变换在求解微分方程时非常有用，因为在 $\mathbf{r}$ 空间中的导数运算在 $\mathbf{k}$ 空间中变成了普通的乘法。例如，若对方程 (9.139) 中的 $f(\mathbf{r})$ 进行 x_j 方向的偏导数，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_\infty^k} d^n k \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_j x_j + \dots + k_n x_n)} \tilde{f}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_\infty^k} d^n k (i k_j) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (9.197)$$

即，每次对 $\mathbf{r}$ 的某个分量求偏导数时， $\mathbf{k}$ 的对应分量都会“下降”乘以 i 。因此，在 n 维空间中，梯度算子和拉普拉斯算子可以表示为：

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-n/2} \int d^n k (i\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}), \\ \nabla^2 f(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-n/2} \int d^n k (-k^2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (9.198)$$

例 9.18 让我们用一个简单的例子来说明上述方法。考虑一个常微分方程：

$$y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{若 } t > 0 \\ 0 & \text{若 } t < 0 \end{cases} \quad (9.199)$$

其中 ($a > 0$)。我们可以通过傅里叶变换来“求解”此方程，方法是将以下表达式代入方程：

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{y}(\omega) e^{i\omega t}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{y}(\omega) (i\omega) e^{i\omega t}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{y}(\omega) \omega^2 e^{i\omega t}, \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (9.200)$$

将 (9.200) 代入 (9.199)，得到：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{y}(\omega) (-\omega^2 + i8\omega + 7) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}.\quad (9.201)$$

由于傅里叶变换的唯一性，我们可以将 $e^{i\omega t}$ 的系数进行比较，从而得到：

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + i8\omega + 7} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a + i\omega)(7 + i\omega)(1 + i\omega)}.\quad (9.202)$$

将 $\tilde{y}$ 扩展为复变函数 $g(z)$ ：

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a + iz)(7 + iz)(1 + iz)}\quad (9.203)$$

已知 $|g(z)| < M/|z|^3$ 对于某个常数 M 成立，我们有：对于 $t > 0$ ， e^{izt} 在上半平面有界，因此

使用图 99 积分路径：

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_4} g(z) e^{izt} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} g(z) e^{izt} dz \\
 &= i\sqrt{2\pi} \sum \text{在上半平面的极点的留数}
 \end{aligned} \tag{9.204}$$

函数 $e^{izt}g(z)$ 的极点位于：

$$ia, 7i, i \tag{9.205}$$

这些极点均在上半平面，对应的留数分别为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-at}}{i(7-a)(1-a)}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-7t}}{i(a-7)(6)}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t}}{i(a-1)(6)} \tag{9.206}$$

因此，当 $t > 0$ 时，我们得到：

$$y(t) = \frac{e^{-at}}{(7-a)(1-a)} - \frac{e^{-7t}}{(a-7)(6)} + \frac{e^{-t}}{(a-1)(6)} \tag{9.207}$$

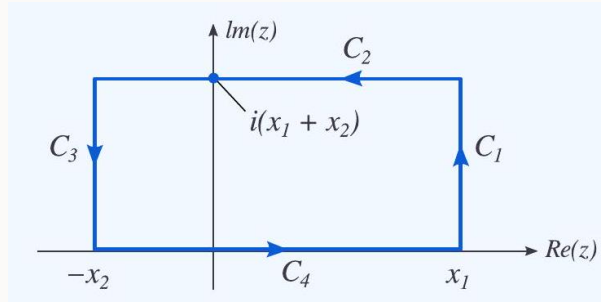


图 99: $t > 0$ 时的积分路径

对于 $t < 0$ ，我们使用图 100 的积分路径。这里的推导方式与 $t > 0$ 时相同，但求和仅包括下半平面的极点。然而，该函数在下半平面没有极点，因此得到：

$$\tilde{y}(t) = 0, \quad t < 0 \tag{9.208}$$

最终结论：

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{e^{-at}}{(7-a)(1-a)} + \frac{e^{-7t}}{(7-a)(6)} - \frac{e^{-t}}{(1-a)(6)}, & t > 0 \end{cases} \tag{9.209}$$

注意 由于 $|g(z)| < M/|z|^3$ ，我们也可以使用半圆代替矩形路径来计算傅里叶逆变换积分。

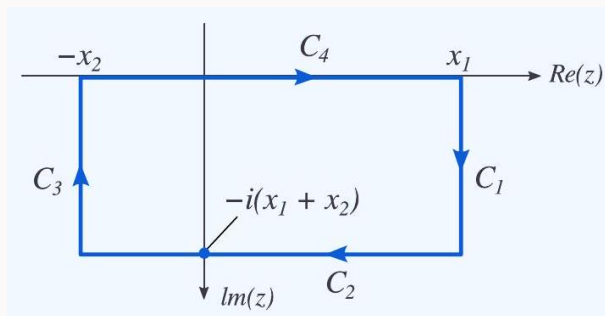


图 100: $t < 0$ 时的积分路径

例 9.19 考虑以下微分方程:

$$y'' + y = f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (9.210)$$

其中 $a > 0$ 。求解 $t > 0$ 时的 $y(t)$ 。

解: 采用傅里叶变换, 得到:

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a + i\omega)(1 - \omega^2)} \quad (9.211)$$

(最后一步使用了 $f(t)$ 的已知傅里叶变换)。

我们将 $\tilde{y}(\omega)$ 扩展为复变函数:

$$g(z) = \frac{1}{(a + iz)(1 - z^2)} \quad (9.212)$$

该函数的极点位于:

$$z = -1, \quad 1, \quad ai \quad (9.213)$$

由于某些极点位于实轴上, 我们需要沿实轴使用凹形的积分路径, 并采用柯西主值计算积分。

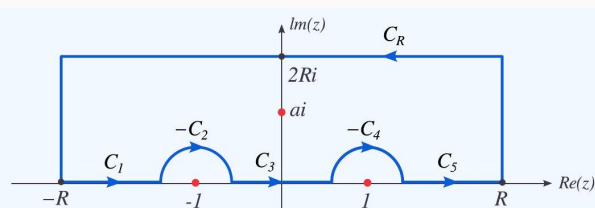


图 101: 积分路径

对于 $t > 0$, $e^{izt}g(z)$ 在上半平面满足 $|g(z)| < M/|z|^3$, 因此可以应用留数定理。我们有如下极限计算:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{izt} g(z) dz = 0 \quad (9.214)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_2} e^{izt} g(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), -1) \quad (9.215)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_4} e^{izt} g(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), 1) \quad (9.216)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_1+C_3+C_5} e^{izt} g(z) dz = \sqrt{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9.217)$$

结合留数定理，我们得到：

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{C_1-C_2+C_3-C_4+C_5+C_R} e^{izt} g(z) dz &= \sqrt{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &\quad - \pi i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), -1) - \pi i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), 1) \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), ai) \end{aligned} \quad (9.218)$$

接下来计算留数，结果如下：

$$\operatorname{Res}(e^{izt} g(z), -1) = \frac{e^{-it}}{2(a-i)} \quad (9.219)$$

$$\operatorname{Res}(e^{izt} g(z), 1) = -\frac{e^{it}}{2(a+i)} \quad (9.220)$$

$$\operatorname{Res}(e^{izt} g(z), ai) = -\frac{e^{-at}}{i(1+a^2)} \quad (9.221)$$

因此，对于 $t > 0$ ，我们有：

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{i}{2} \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), -1) + \frac{i}{2} \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), 1) + i \operatorname{Res}(e^{izt} g(z), ai) \\ &= \frac{e^{-at}}{1+a^2} + \frac{a}{1+a^2} \sin t - \frac{1}{1+a^2} \cos t \end{aligned} \quad (9.222)$$

10 拉普拉斯变换

10.1 拉普拉斯变换的定义

定义 10.1 函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 (Laplace transform) 定义为:

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.1)$$

其中, s 可以取复数值, 且该积分必须收敛。

说明

- 拉普拉斯变换仅关注 $t \geq 0$ 时的 $f(t)$, 通常我们可以假设 $f(t) = 0$ 对于 $t < 0$;
- 在上下文明确的情况下, 我们常用大写字母表示拉普拉斯变换, 即: $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$;
- 在某些情况下, 也可以写作 $\mathcal{L}[f(t)]$, 其中 s 变量隐含在表达式中。

例 10.1 (常见函数的拉普拉斯变换) 单位函数 (值恒为 1 的函数) 的拉普拉斯变换可直接计算得:

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (10.2)$$

对于指数函数 $e^{i\omega t}$, 其拉普拉斯变换为:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-s+i\omega)t} dt = \frac{e^{(-s+i\omega)t}}{-s+i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-i\omega}. \quad (10.3)$$

由上式可得, 余弦函数和正弦函数的拉普拉斯变换分别为:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \operatorname{Re}(\mathcal{L}[e^{i\omega t}]) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (29.49)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \operatorname{Im}(\mathcal{L}[e^{i\omega t}]) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{s-i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (29.50)$$

阶跃函数 $\theta(t-a)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \theta(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}. \quad (10.4)$$

积分下限的变化源于 $\theta(t-a)$ 在 $t < a$ 时为 0, 在 $t > a$ 时为 1。

由 $\mathcal{L}[1]$, 我们可以计算任何正整数次幂 t^n 的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{\infty} e^{-st} dt. \quad (10.5)$$

由于 $\mathcal{L}[1] = 1/s$ ，我们得到：

$$\mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (10.6)$$

如果 n 不是整数，而是任意实数 ν ，则直接计算得：

$$\mathcal{L}[t^\nu] = \int_0^\infty t^\nu e^{-st} dt. \quad (10.7)$$

通过变量变换 $u = st$ 并利用伽马函数 $\Gamma(x)$ ，可得：

$$\mathcal{L}[t^\nu] = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_0^\infty u^\nu e^{-u} du = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}, \quad (10.8)$$

其中 $\Gamma(\nu+1)$ 为伽马函数，满足 $\Gamma(n+1) = n!$ ，因此当 $\nu = n$ 为整数时，恢复整数公式。

10.2 拉普拉斯变换的收敛性

拉普拉斯变换的定义依赖于积分的收敛性。函数有有限的增长指数是拉普拉斯变换收敛的充分条件。

定义 10.2 如果存在常数 M 使得对于所有 $t \geq 0$, 有不等式成立:

$$|f(t)| < Me^{at}, \quad a \leq 0, \quad (10.9)$$

则称 $f(t)$ 具有增长指数型 a 。

注意 按照上述定义, 函数的指数型并不唯一。例如, 一个具有指数型 2 的函数显然也具有指数型 3。通常找到最小的指数型是有益的, 但并非总是必要的。

定理 10.1 若函数 f 具有增长指数型 a , 则其拉普拉斯变换 $\mathcal{L}(f(t))$ 在 $\operatorname{Re}(s) > a$ 时绝对收敛。

证明: 我们通过对 $|f(t)e^{-st}|$ 进行估计来证明绝对收敛性。由于 f 具有指数型 a , 存在常数 $M > 0$ 使得

$$|f(t)| \leq Me^{at}. \quad (10.10)$$

因此, 拉普拉斯变换的积分可以被如下估计:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_0^\infty Me^{at}e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = \int_0^\infty Me^{(\operatorname{Re}(a)-\operatorname{Re}(s))t} dt. \quad (10.11)$$

若 $\operatorname{Re}(s) > a$, 则积分收敛, 证毕。

10.3 拉普拉斯变换的主要性质

- 线性性质 (Linearity)

拉普拉斯变换及其逆变换具有线性性：

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g], \quad \mathcal{L}^{-1}[aF + bG] = a\mathcal{L}^{-1}[F] + b\mathcal{L}^{-1}[G]. \quad (10.12)$$

- 第一平移性质 (First Shift Property)

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则 $F(s - a)$ 是 $e^{at}f(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$F(s - a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt. \quad (10.13)$$

这一结果的逆变换形式为：

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s - a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \quad (10.14)$$

- 第二平移性质 (Second Shift Property)

若 $f(t)$ 与单位阶跃函数 $\theta(t - a)$ 相乘，则拉普拉斯变换满足：

$$\mathcal{L}[\theta(t - a)f(t - a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f](s). \quad (10.15)$$

证明如下：

$$\mathcal{L}[\theta(t - a)f(t - a)] = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t - a) dt. \quad (10.16)$$

令 $\tau = t - a$ ，则上式变为：

$$\mathcal{L}[\theta(t - a)f(t - a)] = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as}\mathcal{L}[f](s). \quad (10.17)$$

其逆变换形式为：

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \theta(t - a)f(t - a) = \begin{cases} f(t - a), & t \geq a, \\ 0, & t < a. \end{cases} \quad (10.18)$$

- 拉普拉斯变换作用于函数的导数满足以下公式：

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0). \quad (10.19)$$

证明： 利用分部积分计算拉普拉斯变换：

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.20)$$

由于 $f(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 处满足适当的收敛条件，使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ ，因此：

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0). \quad (10.21)$$

- 对于二阶导数，拉普拉斯变换满足：

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0). \quad (10.22)$$

证明： 利用递推公式：

$$\mathcal{L}[f''](s) = s \mathcal{L}[f'](s) - f'(0). \quad (10.23)$$

将 $\mathcal{L}[f'](s)$ 代入：

$$\mathcal{L}[f''](s) = s(s \mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0), \quad (10.24)$$

整理得到：

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0). \quad (10.25)$$

10.3.1 周期函数的拉普拉斯变换

尽管傅里叶级数更适用于周期函数的分析，但拉普拉斯变换在处理周期函数时 also 具有重要的应用价值。设 $f(t)$ 是周期为 T 的周期函数，即满足：

$$f(t+T) = f(t). \quad (10.26)$$

对 $f(t)$ 进行拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.27)$$

将积分拆分：

$$\mathcal{L}[f(t)] = \underbrace{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}_{\text{定义为 } F_1(s)} + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.28)$$

利用周期性 $f(t+T) = f(t)$ ，令 $u = t - T$ ，可得：

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T) du \\ &= e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

因此，拉普拉斯变换满足：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F_1(s) + e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (10.30)$$

解出 $\mathcal{L}[f(t)]$ ：

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad (10.31)$$

其中：

$$F_1(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (10.32)$$

这一公式表明，周期函数的拉普拉斯变换可以表示为在一个周期上的积分 $F_1(s)$ 乘以一个因子 $\frac{1}{1-e^{-sT}}$ 。

10.3.2 卷积 (Convolution)

两个函数的卷积 (convolution) 定义为:

$$(f \otimes g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \quad (10.33)$$

做变量代换 $v = t - u$, 则积分变量变为 v , 从而得到:

$$(f \otimes g)(t) = \int_t^0 f(t-v)g(v)(-dv) = \int_0^t g(v)f(t-v)dv = (g \otimes f)(t), \quad (10.34)$$

这表明卷积运算是可交换的 (commutative)。

此外, 卷积还满足以下性质:

1. 线性性: $c(f \otimes g) = cf \otimes g = f \otimes cg$, 其中 c 为常数;
2. 交换性: $f \otimes g = g \otimes f$;
3. 结合性: $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$;
4. 分配性: $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$ 。

定理 10.2 拉普拉斯变换将两个函数的卷积变换为它们各自拉普拉斯变换的乘积:

$$\mathcal{L}[f \otimes g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s). \quad (10.35)$$

其逆变换为:

$$(f \otimes g)(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)]. \quad (10.36)$$

10.3.3 拉普拉斯变换的微分

通过对拉普拉斯变换的积分进行微分, 可以得到以下公式:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)], \quad (10.37)$$

或其逆变换形式:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}[F(s)], \quad (10.38)$$

其中, $F^{(n)}(s)$ 表示 $F(s)$ 的 n 阶导数。

对于 $n = 1$, 上式可导出一个有用的关系式:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F'(s)], \quad (10.39)$$

在某些情况下, 求解函数的导数的拉普拉斯逆变换可能比直接求解函数本身的逆变换更加容易。

例 10.2 求 $F(s) = \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$ 的拉普拉斯逆变换。

解: 直接求解 $F(s)$ 的逆变换较为困难, 但我们可以先求导数的逆变换, 再利用公式进行积分。首先, 计算 $F(s)$ 的导数:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} [\ln(s+a) - \ln(s+b)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}. \quad (10.40)$$

这个表达式的拉普拉斯逆变换较容易计算：

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right] = e^{-at} - e^{-bt}. \quad (10.41)$$

最终得到：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s+b}\right] = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}. \quad (10.42)$$

10.3.4 与傅里叶变换的联系

拉普拉斯变换与傅里叶变换密切相关，因此有时拉普拉斯变换也被称为傅里叶-拉普拉斯变换。为了揭示二者之间的联系，我们从函数 $f(t)$ 的傅里叶变换开始：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (10.43)$$

如果假设 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$ ，则傅里叶变换可简化为：

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (10.44)$$

另一方面，令 $s = i\omega$ ，则拉普拉斯变换可写为：

$$\mathcal{L}(f; s) = \mathcal{L}(f; i\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (10.45)$$

比较上式和傅里叶变换的表达式，我们发现：

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{L}(f; i\omega) \quad (10.46)$$

由此可见，拉普拉斯变换和傅里叶变换在本质上是相同的变换，只是使用了不同的符号表示，至少对于 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$ 的情况而言，它们是等价的。

10.4 拉普拉斯变换在求解微分方程中的应用

某些具有适当边界条件或初始条件的微分方程可以通过拉普拉斯变换技巧求解。

例 10.3 求解微分方程：

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.47)$$

解： 对方程两侧取拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}[\ddot{x}](s) + \omega_0^2 \mathcal{L}[x](s) = 0. \quad (10.48)$$

利用导数的拉普拉斯变换公式：

$$s^2 \mathcal{L}[x](s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \omega_0^2 \mathcal{L}[x](s) = 0. \quad (10.49)$$

令 $x_0 = x(0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, 整理得到：

$$(s^2 + \omega_0^2) \mathcal{L}[x](s) = sx_0 + \dot{x}_0. \quad (10.50)$$

解得：

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{x_0 s + \dot{x}_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (10.51)$$

利用拉普拉斯变换的反演公式：

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right] = \cos \omega_0 t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right] = \sin \omega_0 t, \quad (10.52)$$

得到解：

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (10.53)$$

10.5 拉普拉斯逆变换

有时候，我们可以通过查表的方法计算拉普拉斯逆变换。例如， $\mathcal{L}^{-1}(1/(s-a)) = e^{at}$ 。然而，为了更严格地进行求解，我们首先需要检查拉普拉斯变换是否具有唯一的逆变换。

不幸的是，这在严格意义上并不成立。存在许多不同的函数具有相同的拉普拉斯变换，以下是可能导致这种情况的几种方式：

1. 如果 $f(t) = g(t)$ 在 $t \geq 0$ 区间上相等，那么显然有 $F(s) = G(s)$ 。由于拉普拉斯变换仅涉及 $t \geq 0$ 的部分，因此这些函数在 $t < 0$ 处可能完全不同。
2. 设 $f(t) = e^{at}$ ，定义另一个函数

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{当 } t \neq 1 \\ 0, & \text{当 } t = 1 \end{cases}$$

也就是说， f 和 g 仅在 $t = 1$ 处被人为地赋予了不同的值。由于积分不会注意到单点的变化，因此 $F(s) = G(s) = 1/(s-a)$ 。在这个意义上，无法唯一地定义 $\mathcal{L}^{-1}(F)$ 。

只要我们认为仅在可忽略集合上的不同函数是相同的，拉普拉斯逆变换就存在。特别地，我们可以做出以下结论：

定理 10.3 假设 f 和 g 是连续函数，并且对于某个实数 a ，它们的拉普拉斯变换满足

$$F(s) = G(s), \quad \text{对于所有 } \operatorname{Re}(s) > a.$$

则有：

$$f(t) = g(t), \quad t \geq 0.$$

这一定理也适用于分段连续函数，但其严格表述需要更多的细节。

例 10.4 函数 $f(t) = e^{at}$ 的拉普拉斯变换为：

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \quad (10.54)$$

证明：

$$f(t) = \sum \operatorname{Res}(F(s)e^{st}) \quad (10.55)$$

以及

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (10.56)$$

其中，求和遍历 $e^{st}/(s-a)$ 的所有极点，并且我们仅考虑 $t > 0$ 的情况。这里 $c > \operatorname{Re}(a)$ ，积分表示沿着竖直线 $x = c$ 的路径积分。

解： 证明方程 (10.55) 非常直接：分母 $s-a$ 仅有一个极点 $s = a$ ，因此：

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{s-a}, a\right) = e^{at} \quad (10.57)$$

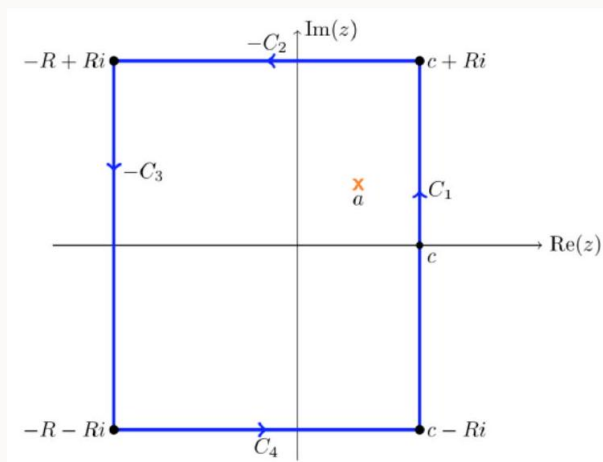


图 102: 用于计算拉普拉斯逆变换的闭合路径

证明方程 (10.56) 需要更多的推导。首先，我们验证积分的收敛性。设 $s = c + iy$ ，则积分可写为：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(c+iy)t}}{c+iy-a} idy = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyt}}{c+iy-a} dy \quad (10.58)$$

该积分的条件收敛性可以利用傅里叶反演公式的类似方法证明。

现在，我们考虑图 102 的积分路径，令 $R \rightarrow \infty$ ，并使用以下步骤证明方程 (10.56)：

1. 利用留数定理，如果积分路径包含极点 $s = a$ ，则：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1-C_2-C_3+C_4} \frac{e^{st}}{s-a} ds = \sum \text{Res} \left(\frac{e^{st}}{s-a}, a \right) = e^{at} \quad (10.59)$$

2. 接下来，我们将证明当 $R \rightarrow \infty$ 时，积分路径 C_2, C_3, C_4 上的积分都趋于 0。
3. 由于当 $R \rightarrow \infty$ 时， C_1 上的积分收敛于 (10.56) 的右侧积分，因此我们有：

$$e^{at} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1-C_2-C_3+C_4} \frac{e^{st}}{s-a} ds = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{s-a} ds \quad (10.60)$$

现在，我们验证步骤 2，即积分路径 C_2, C_3, C_4 上的积分都趋于零。

路径 C_2 设 C_2 的参数方程为 $s = \gamma(u) = u + iR$ ，其中 $-R \leq u \leq c$ ，则：

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{st}}{s-a} ds \right| \leq \int_{-R}^c \left| \frac{e^{(u+iR)t}}{u+iR-a} \right| du \leq \int_{-R}^c \frac{e^{ut}}{R} du = \frac{e^{ct} - e^{-Rt}}{tR} \quad (10.61)$$

由于 c 和 t 是固定的，当 $R \rightarrow \infty$ 时，该积分趋于 0。

路径 C_4 处理方式与路径 C_2 相同，积分同样趋于 0。

路径 C_3 设 C_3 的参数方程为 $s = \gamma(u) = -R + iu$ ，其中 $-R \leq u \leq R$ ，则：

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{st}}{s-a} ds \right| \leq \int_{-R}^R \left| \frac{e^{(-R+iu)t}}{-R+iu-a} \right| du \leq \int_{-R}^R \frac{e^{-Rt}}{R+a} du = \frac{e^{-Rt}}{R+a} \int_{-R}^R du = \frac{2e^{-Rt}}{R+a} \quad (10.62)$$

由于 a 和 $t > 0$ 是固定的, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 该积分趋于 0。

综上所述, 所有路径 C_2, C_3, C_4 上的积分均趋于 0, 从而证明了公式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{s-a} ds \quad (10.63)$$

定理 10.4 (拉普拉斯逆变换定理 1) 假设函数 f 是连续的, 并且具有指数型 a 。那么当 $c > a$ 时, 有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (10.64)$$

该公式适用于 $t > 0$ 的情况。

定理 10.5 (拉普拉斯逆变换定理 2) 假设 $F(s)$ 具有有限个极点, 并且衰减速度不慢于 $1/s$ 。定义

$$f(t) = \sum \text{Res} (F(s)e^{st}, p_k), \quad (10.65)$$

其中求和遍及所有极点 p_k , 则

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \quad (10.66)$$

11 偏微分方程

物理学作为最精确的科学，其核心特征在于能够进行定量预测。物理预测依赖于两个因素：初始信息（数据）和控制物理过程的定律。已知某一时刻和地点的状态（即初始数据、初始条件、边界条件）后，物理学便能预测未来某一时刻、某一地点的状态。

这种预测能力基于一个直观的信念：物理量依赖于位置和时间等连续参数，因此它们应当是这些参数的连续函数。因此，只要已知这些函数在某一初始点的值，以及它们如何随位置或时间变化（由物理定律给出），我们便能够预测它们在相邻点的值。确定了新点的函数值后，我们可以继续预测其相邻点的值，如此迭代，最终可推知远方任意点的函数值。

12 微分方程在物理学中的应用

在力学中，例如，若已知质量为 m 的粒子在时刻 t_0 处于位置 $\mathbf{r}_0$ ，动量为 $\mathbf{p}_0$ ，并且受力 $\mathbf{F}$ 作用，那么可以预测该粒子在稍后时刻 $t_0 + \Delta t$ 的动量和位置。根据牛顿第二定律 $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ ，有

$$\Delta \mathbf{p} \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t_0) \Delta t \quad (12.1)$$

从而得到

$$\mathbf{p}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p} \approx \mathbf{p}_0 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t_0) \Delta t \quad (12.2)$$

同样地，

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t \approx \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_0}{m} \Delta t \quad (12.3)$$

当 Δt 越小时，预测的精度就越高。

牛顿第二定律的数学表达式

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t) \quad (12.4)$$

是一个常微分方程 (**ordinary differential equation, ODE**) 的例子，其中未知量 $\mathbf{r}$ 是单一自变量 t 的函数，并且方程涉及 $\mathbf{r}$ 及其导数。

在质点的力学中，由于只有一个自变量 t ，所涉及的方程为常微分方程。然而，在物理学的其他领域，如涉及连续介质或场的研究时，函数不仅依赖于时间，还依赖于空间坐标。在这种情况下，方程中会出现对坐标变量的偏导数，此类方程被称为**偏微分方程 (partial differential equation, PDE)**。例如，在静电学中，描述电势场的基本方程是泊松方程 (**Poisson's equation**)：

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (12.5)$$

其中 Φ 为静电势， ρ 为体电荷密度。除此之外，数学物理中常见的偏微分方程还包括：

- **热传导方程**：描述热传导过程；
- **波动方程**：描述各种类型的波的传播；
- **薛定谔方程**：描述非相对论量子力学现象。

事实上，除了质点的力学和电路理论中因变量仅依赖于时间，大多数物理定律都由偏微分方程描述。尽管偏微分方程的理论十分广泛，我们仅关注在理想物理应用中最常见的偏微分方程，并介绍适用于这些方程的求解方法——**分离变量法**，该方法将偏微分方程转化为多个常微分方程进行求解。

无论是常微分方程还是偏微分方程，要得到唯一确定的物理解，都需要给定解的某些初始信息。我们称此为**边界条件 (Boundary Conditions, BCs)**。

- 对于常微分方程，边界条件通常是解在某个初始时间的已知值，因此也称为**初始条件 (Initial Conditions)**。
- 对于偏微分方程，边界条件涉及解在某个边界（如空间表面或曲线）上的已知值。

12.1 分离变量法

在本节中，我们列出本科课程中常见的偏微分方程并介绍它们如何转化为常微分方程。首先考虑静电学问题中最基本的偏微分方程，即**泊松方程**：

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (12.6)$$

在真空中，由于电荷密度 $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ，泊松方程化简为**拉普拉斯方程**：

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (12.7)$$

许多静电学问题涉及处于恒定电势的导体，这些导体通常位于真空中。在这些导体表面之间的空间内，电势函数 $\Phi(\mathbf{r})$ 满足拉普拉斯方程。

接下来介绍的是**热传导方程**，其最简化形式为：

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = k^2 \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) \quad (12.8)$$

其中， T 代表温度， k 是表征热量传播介质特性的实常数。

在数学物理中最常见的偏微分方程之一是**波动方程**：

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (12.9)$$

此方程（或其在低维情况下的简化形式）适用于：弦的振动；气体、固体和液体中的声波传播；电磁波的传播。

描述非相对论量子现象的**薛定谔方程**为：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (12.10)$$

其中：

- m 是亚原子粒子的质量，例如电子质量，
- $\hbar$ 是约化普朗克常数（普朗克常数 h 除以 2π ），
- $V(\mathbf{r})$ 是粒子的势能，假设与时间无关，
- $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ 是粒子在时刻 t 处于 $\mathbf{r}$ 位置的概率密度。

上述方程均含有关于时间的偏导数。为求解这些偏微分方程，第一步通常是**分离变量**。我们用通用符号 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 表示所有四个方程中的未知函数，以便在后续推导中统一处理。

分离变量法的基本思想是将 $\mathbf{r}$ 和 t 的依赖性分离成两个因子：

$$\Psi(\mathbf{r}, t) := R(\mathbf{r})T(t) \quad (12.11)$$

这种分离使得空间微分和时间微分的操作能够独立进行。以**薛定谔方程**为例，其他方程的处理方式类似。将 Ψ 代入薛定谔方程，我们得到：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (RT) + V(\mathbf{r})(RT) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (RT) \quad (12.12)$$

整理后可得：

$$-T \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + V(\mathbf{r})(RT) = iR\hbar \frac{dT}{dt} \quad (12.13)$$

其中，由于 T 仅为时间的函数，我们将其偏导数替换为普通导数。接下来，将两边同时除以 RT ，得到：

$$-\frac{1}{R} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + V(\mathbf{r}) = i \frac{1}{T} \hbar \frac{dT}{dt}. \quad (12.14)$$

注意 分离变量的假设并非总是成立，例如，方程包含非线性项（如 Navier-Stokes 方程），方程的系数依赖于多个变量（如非均匀热方程）等。在这些情况下，分离变量法通常不适用，需要采用其他方法。

在分离变量过程中，最关键的一步是认识到上式的左侧仅依赖于空间变量 $\mathbf{r}$ ，而右侧仅依赖于时间 t 。由于 $\mathbf{r}$ 和 t 是独立变量，方程能够成立的唯一方式是两边都等于某个常数 α ，即：

$$-\frac{1}{R} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + V(\mathbf{r}) = \alpha \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + V(\mathbf{r})R = \alpha R \quad (12.15)$$

以及

$$i\hbar \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{i\alpha}{\hbar} T \quad (12.16)$$

我们成功地将原本的时间相关薛定谔方程（一个偏微分方程）分解为：

- 一个仅含时间的常微分方程；
- 一个仅含空间坐标的偏微分方程。

大多数数学物理问题都具有类似的性质，即可以归结为：

$$\nabla^2 R + f(\mathbf{r})R = 0 \quad (12.17)$$

其中， α 被吸收到函数 $f(\mathbf{r})$ 中以简化记号。上述讨论可以总结如下：

数学物理中的时间相关偏微分方程可以分解为一个关于时间的常微分方程以及一个形如 (12.17) 的偏微分方程。对于含有时间二阶导数的方程（例如波动方程），(12.16) 将是一个二阶常微分方程。

除了泊松方程之外，上述方程右侧项均为零。我们将仅考虑齐次情况¹⁶：

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (12.18)$$

¹⁶最有效的求解非齐次偏微分方程的方法是使用格林函数方法（Green's functions method）。

12.2 笛卡尔坐标系中的分量变量法

在直角坐标系中, 方程 (12.18) 变为:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + f(x, y, z)\Psi = 0 \quad (12.19)$$

类似于时间变量的分离, 我们假设 Ψ 可以分解为各坐标变量的乘积形式:

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (12.20)$$

代入上述偏微分方程后, 得到:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(x, y, z)XYZ = 0 \quad (12.21)$$

两边同除以 XYZ , 可得:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(x, y, z) = 0 \quad (12.22)$$

注意 此方程尚未完全分离, 前三项分别仅依赖于 x, y, z , 但最后一项 $f(x, y, z)$ 通常混合了坐标变量。要实现完全分离, $f(x, y, z)$ 也必须能够写成各坐标变量的独立函数之和, 即:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0 \quad (12.23)$$

这可进一步重写为:

$$\left[\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + f_1(x) \right] + \left[\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + f_2(y) \right] + \left[\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_3(z) \right] = 0 \quad (12.24)$$

其中, 第一项仅依赖于 x , 第二项仅依赖于 y , 第三项仅依赖于 z 。由于它们的和是一个与所有变量无关的常数 (即零), 因此每一项都必须是一个常数。设对应的常数分别为 $-\alpha_i$, 可得:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + f_1(x) = -\alpha_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + f_2(y) = -\alpha_2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_3(z) = -\alpha_3 \quad (12.25)$$

可重新整理为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + [f_1(x) + \alpha_1] X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + [f_2(y) + \alpha_2] Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + [f_3(z) + \alpha_3] Z &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12.26)$$

特殊情况: $f(x, y, z)$ 为常数 如果 $f(x, y, z)$ 是某个常数 C , 则方程 (12.22) 的前三项可以分别取 $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$, 从而得到:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_1 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha_3 Z = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = C \quad (12.27)$$

这些方程组成了直角坐标系下由方程 (12.18) 分离变量所得到的一般常微分方程组。

例 12.1 考虑方程 (12.26) 或 (12.27) 适用的几种情况。

解： (a) 静电学中的拉普拉斯方程

在静电学中，拉普拉斯方程对应于 $f(\mathbf{r}) = 0$ ，此时分离变量得到的常微分方程组为：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_1 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - (\alpha_1 + \alpha_2) Z = 0 \quad (12.28)$$

这些方程的解为三角函数或双曲（指数）函数，具体形式由边界条件（如导体表面）决定。值得注意的是，这三个坐标的处理方式是不对称的——前两个常数项前的符号为正，第三个为负。然而，边界条件将决定这些常数的具体值，使其适应物理情境。

(b) 量子力学中的自由粒子薛定谔方程

在量子力学中，三维自由粒子的时间无关薛定谔方程为：

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (12.29)$$

分离变量后，得到的常微分方程组与方程 (12.27) 形式相同，其中

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (12.30)$$

类似地，在时间分离变量后，热方程和波动方程也会得到类似于 (12.27) 的方程组。

(c) 量子力学中的三维各向同性谐振子

在量子力学中，三维各向同性谐振子的时间无关薛定谔方程为：

$$\nabla^2 \Psi - \left(\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \Psi = 0 \quad (12.31)$$

因此，

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (12.32)$$

代入方程 (12.26)，得到：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 X + \alpha_1 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} y^2 Y + \alpha_2 Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} z^2 Z + \alpha_3 Z &= 0, \end{aligned} \quad (12.33)$$

其中 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2mE/\hbar^2$ 。

12.3 柱坐标系中的分量变量法

方程 (12.18) 在柱坐标系中的形式为:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + f(\rho, \varphi, z) \Psi = 0 \quad (12.34)$$

为了分离变量, 我们设 $\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)S(\varphi)Z(z)$, 将其代入方程, 并两边同时除以 RSZ , 得到

$$\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{S} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(\rho, \varphi, z) = 0 \quad (12.35)$$

我们仅考虑 $f(\rho, \varphi, z)$ 为常数 λ 的特殊 (但重要) 情况, 此时方程变为

$$\underbrace{\left[\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) \right]}_{\text{仅依赖于 } \rho \text{ 和 } \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\left[\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right]}_{\text{仅依赖于 } z} + \left[\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] + \lambda = 0 \quad (12.36)$$

由于前三项的和独立于 z , 因此第三项也必须独立于 ρ 和 φ , 从而得到

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda_1 \quad (12.37)$$

进而得到

$$\left[\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right) + \lambda_1 + \lambda = 0 \quad (12.38)$$

将该方程两侧同时乘以 ρ^2 , 得到

$$\underbrace{\left[\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\lambda_1 + \lambda) \rho^2 \right]}_{\text{仅依赖于 } \rho} + \underbrace{\left(\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right)}_{\text{仅依赖于 } \varphi} = 0 \quad (12.39)$$

由于第一项仅依赖于 ρ , 第二项仅依赖于 φ , 两者之和必须为常数, 其值设为 μ , 从而得到

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} = \mu, \quad \frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\lambda_1 + \lambda) \rho^2 + \mu = 0 \quad (12.40)$$

综上所述, 当方程 (12.18) 在柱坐标系下可分离变量, 且 $f(\mathbf{r}) = \lambda$ 时, 它将分解为以下三个常微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda_1 Z &= 0, & \frac{d^2 S}{d\varphi^2} - \mu S &= 0, \\ \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left\{ (\lambda_1 + \lambda) \rho + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \right\} R &= 0 \end{aligned} \quad (12.41)$$

其中, 在重写方程 (12.40) 的第二个方程时, 我们同时乘以 R 并除以 ρ 。方程 (12.41) 的最后一个方程被称为 **贝塞尔方程**, 该方程在静电学、热传导问题中的柱坐标系情境下, 以及涉及二维波动传播 (如鼓面振动) 的问题中都会出现。

12.4 球坐标系中的分量变量法

数学物理中最常使用的坐标系无疑是球坐标系。这是因为自然界中的力、势能以及大多数几何形状通常具有球对称性。球对称性的一个重要结果是，函数 $f(\mathbf{r})$ 仅依赖于 r ，而与角度无关。我们将在本小节中假设这一性质成立。

在球坐标系中，方程 (12.18) 变为：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right\} + f(r) \Psi = 0 \quad (12.42)$$

为了分离变量，我们设 $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 。将其代入方程 (12.42) 并利用偏导数仅作用于各自的变量，得到

$$\Theta \Phi \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \left[\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] + f(r) R \Theta \Phi = 0 \quad (12.43)$$

将该方程两边同时除以 $R\Theta\Phi$ 并乘以 r^2 ，得到

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r)}_{\text{仅依赖于 } r} + \underbrace{\left[\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right]}_{\text{仅依赖于 } \theta \text{ 和 } \varphi} = 0 \quad (12.44)$$

由于这两个项分别仅依赖于不同的变量，因此它们各自必须是常数，并且这两个常数的和必须为零。因此，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 f(r) &= \alpha, \\ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -\alpha \end{aligned} \quad (12.45)$$

第二个方程可以进一步分离。我们将 α 加到等式两边，并将其乘以 $\sin^2 \theta$ ，得到

$$\underbrace{\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha \sin^2 \theta}_{\text{仅依赖于 } \theta} + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{=-\beta} = 0 \quad (12.46)$$

这样，我们得到了三个常微分方程，它们可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[f(r) - \frac{\alpha}{r^2} \right] R &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \beta \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (12.47)$$

第一个方程称为径向方程；第二个方程称为极角方程；第三个方程称为方位角方程。径向方程可以通过变量替换 $R = u/r$ 进一步简化，这样得到

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[f(r) - \frac{\alpha}{r^2} \right] u = 0 \quad (12.48)$$

本章的任务是将数学物理中最常见的偏微分方程分离变量并转化为常微分方程；我们已经在三种常见的坐标系中完成了这一目标。对于这些常微分方程的详细研究，我们将在本书后续章节中进行，同时介绍十九世纪数学家在分离变量方法的应用过程中所发现的特征函数（特殊函数）。

13 一阶微分方程

在上一章中，我们看到所讨论的所有偏微分方程都导致了二阶常微分方程，即涉及二阶导数的微分方程。因此，研究一阶微分方程（first-order differential equations, FODEs）似乎并不重要。然而，有时二阶微分方程可以通过适当的变换表示为仅涉及一阶导数的方程。例如，考虑牛顿第二定律在直线上（例如自由落体）的形式：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad (13.1)$$

如果我们将它改写为速度的形式，则得到：

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (13.2)$$

当 F 仅是速度 v 的函数（例如考虑空气阻力的自由落体问题）时，这实际上是一个一阶微分方程。

一阶微分方程不仅出现在力学中，也广泛应用于物理学的其他领域。因此，研究它们是非常有必要的。

13.1 一阶微分方程的标准形式

最一般的一阶微分方程可以表示为:

$$G(x, y, y') = 0 \quad (13.3)$$

其中, G 是 x, y, y' 的某个函数。如果 $G(x_1, x_2, x_3)$ 具有适当的数学性质, 我们可以将 y' 解析地表达为 x 和 y 的函数, 即:

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (13.4)$$

这样的方程被称为一阶微分方程**标准 (normal)** 形式。

例 13.1 一阶微分方程的三个特殊情形

解: 对于标准形式的一阶微分方程:

$$y' = F(x, y) \quad (13.5)$$

有三种特殊情形能够直接求解:

- 若 $F(x, y)$ 仅依赖于 x : 此时方程化为 $y' = g(x)$, 可直接积分得到通解:

$$y = f(x) = C + \int_a^x g(t)dt \quad (13.6)$$

其中 $C = f(a)$ 为积分常数。

- 若 $F(x, y)$ 仅依赖于 y : 即 $\frac{dy}{dx} = h(y)$, 方程可以表示为:

$$\frac{dy}{h(y)} = dx \quad (13.7)$$

对两边积分, 得:

$$\underbrace{\int_C^y \frac{dt}{h(t)}}_{:=H(y)} - x + a = 0 \quad (13.8)$$

即:

$$H(y) = x - a \quad (13.9)$$

此方程可解得 y 关于 x 的表达式, 即 $y = f(x)$, 从而得到方程的解。注意到初始条件 $y|_{x=a} = f(a) = C$ 。

- 若 $F(x, y)$ 可分离变量: 即 $F(x, y) = g(x)h(y)$, 方程变为:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad (13.10)$$

对两边积分, 得到:

$$\int_C^y \frac{dt}{h(t)} = \int_a^x g(t)dt \quad (13.11)$$

这是方程的隐式解, 可进一步求解 y 作为 x 的显式表达式。

若一个微分方程的解可以通过求解一个涉及已知函数积分的代数方程获得，则认为该微分方程已被求解。因此，尽管在实际计算中可能无法直接求解方程 (13.11) 的积分，我们仍然认为该微分方程已经求解完毕，因为理论上 (13.11) 已经给出了 y 作为 x 的（隐式）函数的关系。

正如例 13.1 所示，一阶微分方程的解通常以隐式形式给出，即作为两个变量的方程 $u(x, y) = 0$ ，其中 y 的显式表达式可通过解该方程获得。此外， $u(x, y)$ 中包含了一个由初始条件确定的任意常数。这个隐式方程 $u(x, y) = 0$ 描绘了一条位于 xy 平面上的曲线，而其中的任意常数决定了具体曲线的形态。由于不同的常数对应不同的曲线，因此我们可以将其分离出来，写成：

$$u(x, y) = C \quad (13.12)$$

定义 13.1 (一阶常微分方程的积分) 一个标准的一阶常微分方程 (13.4) 的积分是一个二元函数 $u(x, y)$ ，使得当 $y = f(x)$ 为该微分方程的解时，对于所有可能的 x ，都有：

$$u(x, f(x)) = C, \quad (13.13)$$

其中 C 是一个常数。

在物理学中，一阶微分方程的积分常常出现。当变量 x 被时间变量 t 取代时，微分方程描述物理系统的运动，而解 $y = f(t)$ 可以隐式地表示为：

$$u(t, y) = C. \quad (13.14)$$

这个方程描述了一条位于 ty 平面上的曲线，其中 $u(t, y)$ 的值对于所有 t 保持不变。因此， $u(t, y)$ 作为一阶微分方程的积分，也被称为**运动常数 (constant of motion)**。

例 13.2 考虑一个质点在仅依赖于位置的力作用下运动。用 x 表示质点的位置，用 v 表示其速度，根据牛顿第二定律：

$$m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (13.15)$$

使用链式法则，将加速度重新表达为：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (13.16)$$

代入牛顿第二定律，我们得到：

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x) \Rightarrow mv dv = F(x) dx. \quad (13.17)$$

该方程可以直接积分：

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(x) dx + C \equiv -V(x) + C. \quad (13.18)$$

这里，我们引入了**势能函数**：

$$V(x) = - \int F(x) dx. \quad (13.19)$$

于是，我们可以将上式改写为：

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = C. \quad (13.20)$$

这表明方程的积分 $u(x, v)$ 具有如下形式:

$$u(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x), \quad (13.21)$$

这正是质点在势能 $V(x)$ 下的一维运动的总能量表达式。

如果 v 是原方程的解, 则 $u(x, v)$ 是常数:

$$u(x, v) = \text{常数}. \quad (13.22)$$

由于该方程描述了质点的运动过程, 因此它表明: 在质点的运动过程中, 机械能守恒。

13.2 积分因子

设 D 为 xy -平面上的一个区域, 并且 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 是定义在 D 上的连续函数。如果对于 D 中任意两点 P_1 和 P_2 , 线积分

$$\int_{P_1}^{P_2} [M(x, y)dx + N(x, y)dy] \quad (13.23)$$

与连接这两点的路径无关, 则微分形式 $Mdx + Ndy$ 是恰当的 (exact)。这个条件等价于: 该积分在 D 中任意闭合回路上的环路积分为零。

一个微分形式是恰当的充要条件是, 向量 $\mathbf{A} = \langle M, N, 0 \rangle$ 的旋度为零, 即

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (13.24)$$

在这种情况下, 向量 $\mathbf{A}$ 是保守场, 并且存在一个 (势) 函数 v , 使得 $\mathbf{A} = \nabla v$, 即

$$\nabla v = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0 \right\rangle. \quad (13.25)$$

因此,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = Mdx + Ndy. \quad (13.26)$$

即 $Mdx + Ndy$ 是恰当的, 当且仅当存在一个函数 $v(x, y)$ 满足 (13.26) 使得

$$M = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (13.27)$$

现在, 考虑所有满足 $v(x, y) = C$ (其中 C 为常数) 的 y 值。由于 $dC = 0$, 我们有:

$$0 = dv = Mdx + Ndy. \quad (13.28)$$

这意味着 $v(x, y) = C$ 是微分方程的一个隐式解。因此, 我们得到以下定理:

定理 13.1 如果微分形式 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 在 xy -平面的某一区域 D 内是恰当的, 即存在某个函数 $v(x, y)$ 使得

$$dv = Mdx + Ndy, \quad (13.29)$$

则 $v(x, y)$ 是微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13.30)$$

的一个积分, 且其解满足:

$$v(x, y) = C. \quad (13.31)$$

我们已经看到, 对于一个恰当微分, 有 $M = \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $N = \frac{\partial v}{\partial y}$ 。这必然导致

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (13.32)$$

那么, 这个关系是否也是一个充分条件? 考虑如下定义的函数:

$$v(x, y) := \int_a^x M(t, y)dt + \int_b^y N(a, t)dt. \quad (13.33)$$

注意到:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (13.34)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_a^x M(t, y) dt \right] dx + \left[\int_a^x \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y)}_{\partial N / \partial t} dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^y N(a, t) dt \right] dy \quad (13.35)$$

$$= M(x, y) dx + \underbrace{\left[N(t, y) \Big|_{t=a}^{t=x} + N(a, y) \right]}_{=N(x, y)} dy. \quad (13.36)$$

因此, $v(x, y)$ 满足 $dv = Mdx + Ndy$, 由此我们得出以下定理:

定理 13.2 微分形式 $Mdx + Ndy$ 是恰当的当且仅当

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (13.37)$$

在这种情况下, 函数

$$v(x, y) := \int_a^x M(t, y) dt + \int_b^y N(a, t) dt \quad (13.38)$$

满足 $dv = Mdx + Ndy$ 。

并非所有的一阶微分方程都是恰当的。然而, 许多非恰当微分方程可以通过乘以一个合适的函数变为恰当微分方程。如果这样的函数存在, 则称之为**积分因子** (integrating factor)。因此, 如果微分形式 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 不是恰当的, 但满足

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = dv, \quad (13.39)$$

那么, $\mu(x, y)$ 就是微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13.40)$$

的积分因子。该微分方程的解可以表示为 $v(x, y) = C$ 。

注意 积分因子通常不是唯一的, 下面的例子将对此进行说明。

例 13.3 考虑微分形式 $xdy - ydx$, 它不是恰当的。我们尝试找到一个函数 $\mu(x, y)$ 使得存在某个 $v(x, y)$ 使其满足:

$$dv = \mu x dy - \mu y dx. \quad (13.41)$$

假设 v 在 xy 平面上的定义域 D 可收缩为一点, 则该方程成立的充要条件为:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu x) = \frac{\partial}{\partial y}(-\mu y) \Rightarrow x \frac{\partial \mu}{\partial x} + y \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2\mu = 0. \quad (13.42)$$

(a) μ 仅为 x 的函数

假设 μ 仅依赖于 x , 则方程化为:

$$x \frac{d\mu}{dx} = -2\mu. \quad (13.43)$$

其解为:

$$\mu = \frac{C}{x^2}, \quad x \neq 0. \quad (13.44)$$

从而:

$$dv = C \left(\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx \right) = C d \left(\frac{y}{x} \right). \quad (13.45)$$

经过积分, 得到:

$$v = \frac{Cy}{x} = \text{常数}. \quad (13.46)$$

若已知 $x = 1$ 时 $y = m$, 则

$$\frac{Cm}{1} = \text{常数} \Rightarrow \text{常数} = Cm. \quad (13.47)$$

最终解为:

$$\frac{Cy}{x} = Cm \Rightarrow y = mx. \quad (13.48)$$

(b) μ 仅为 y 的函数

若 μ 仅依赖于 y , 则其积分因子为:

$$\mu = \frac{C}{y^2}, \quad y \neq 0. \quad (13.49)$$

由此, 积分因子导出:

$$v = C \frac{x}{y}. \quad (13.50)$$

得到微分方程的积分:

$$C \frac{x}{y} = \text{常数}. \quad (13.51)$$

若满足初始条件 $y|_{x=1} = m$, 则有:

$$\frac{C}{m} = \text{常数}. \quad (13.52)$$

最终解为:

$$y = mx. \quad (13.53)$$

(c) 更一般的积分因子

读者可以验证:

$$\mu = \frac{C}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (13.54)$$

也是一个积分因子, 从而可以得到积分:

$$v = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{常数}. \quad (13.55)$$

由此可得:

$$\frac{y}{x} = \tan(\text{常数}) := C'. \quad (13.56)$$

若满足初始条件 $y(1) = m$, 则 $C' = m$, 最终解仍然是:

$$y = mx. \quad (13.57)$$

上述例子体现了一个普遍事实：如果一个微分形式存在一个积分因子，那么它实际上存在无穷多个积分因子。

证明： 假设 $\nu(x, y)$ 是 $Mdx + Ndy$ 的一个积分因子，即 $\nu Mdx + \nu Ndy$ 是一个恰当微分，例如 du 。对于任意可微函数 $F(u)$ ，定义：

$$\mu(x, y) := \nu(x, y)F'(u). \quad (13.58)$$

那么 $\mu(x, y)$ 也是 $Mdx + Ndy$ 的一个积分因子。实际上，

$$\mu(Mdx + Ndy) = \nu F'(Mdx + Ndy) = \frac{dF}{du} \underbrace{(\nu Mdx + \nu Ndy)}_{=du} = dF. \quad (13.59)$$

因此，选择不同的函数 $F(u)$ ，就能得到不同的积分因子，这说明积分因子不唯一，而是存在无穷多个可能的选择。

13.3 一阶线性微分方程

一个线性微分方程是由各项之和构成的, 其中每一项都是未知函数的某个导数与自变量的某个函数的乘积。微分方程中最高阶导数的阶数称为该方程的**阶数 (order)**。最一般的一阶线性微分方程形式为:

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \Leftrightarrow p_1 dy + (p_0 y - q) dx = 0. \quad (13.60)$$

如果这个方程有解, 那么根据上一小节的结论, 它至少必须有一个积分因子。设 $\mu(x, y)$ 为其积分因子, 则存在某个函数 $v(x, y)$ 使得:

$$dv = \mu(p_0 y - q) dx + \mu p_1 dy = 0. \quad (13.61)$$

该等式成立的充要条件是:

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(p_0 y - q)] = \frac{\partial}{\partial x} (\mu p_1). \quad (13.62)$$

为了简化问题, 我们假设 μ 仅为 x 的函数 (我们只寻找某个积分因子, 而非最一般的积分因子)。此时, 上式化为:

$$\mu p_0 = \frac{d}{dx} (\mu p_1) = p_1 \frac{d\mu}{dx} + \mu \frac{dp_1}{dx}, \quad (13.63)$$

或

$$p_1 \frac{d\mu}{dx} = \mu \left(p_0 - \frac{dp_1}{dx} \right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{p_0}{p_1} dx - \frac{dp_1}{p_1}. \quad (13.64)$$

对两边积分可得:

$$\ln \mu = \int \frac{p_0}{p_1} dx - \ln p_1 + \ln C \Rightarrow \ln \left(\frac{\mu p_1}{C} \right) = \int \frac{p_0}{p_1} dx. \quad (13.65)$$

从而得出:

$$\frac{\mu p_1}{C} = e^{\int p_0 dx / p_1} \Rightarrow \mu = \frac{C e^{\int p_0 dx / p_1}}{p_1}. \quad (13.66)$$

忽略不重要的积分常数, 我们得到了积分因子:

$$\mu(x) = \frac{1}{p_1(x)} \exp \left[\int \frac{p_0(x)}{p_1(x)} dx \right]. \quad (13.67)$$

将原方程两边乘以 μ , 得到:

$$\mu p_1 y' + \mu p_0 y = \mu q. \quad (13.68)$$

利用恒等式 $\mu p_1 y' \equiv (\mu p_1 y)' - (\mu p_1)' y$ 以及 $(\mu p_1)' = \mu p_0$, 上式可化为:

$$\frac{d}{dx} (\mu p_1 y) = \mu q \Rightarrow \mu p_1 y = \int \mu(x) q(x) dx + C. \quad (13.69)$$

因此可以得到如下定理。

定理 13.3 任意一阶线性微分方程

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \quad (13.70)$$

其中 $p_0(x), p_1(x), q(x)$ 在某个区间 (a, b) 内连续, 具有通解:

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)p_1(x)} \left[C + \int \mu(x)q(x)dx \right], \quad (13.71)$$

其中 C 为任意常数, 且

$$\mu(x) = \frac{1}{p_1(x)} \exp \left[\int \frac{p_0(x)}{p_1(x)} dx \right]. \quad (13.72)$$

例 13.4 求解在空气阻力与速度的平方成正比时, 自由落体运动的速度。

解: 考虑空气阻力与速度平方成正比的情形, 牛顿第二定律可表示为:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \gamma v^2, \quad \gamma := \frac{b}{m}. \quad (13.73)$$

该方程可改写为:

$$\frac{dv}{g - \gamma v^2} = dt \Rightarrow \frac{dv}{A^2 - v^2} = \gamma dt, \quad A^2 := \frac{g}{\gamma}. \quad (13.74)$$

将分母拆分:

$$\frac{1}{A^2 - v^2} = \frac{1}{2A} \left[\frac{1}{v + A} - \frac{1}{v - A} \right]. \quad (13.75)$$

两边乘以 $2A$ 并积分:

$$\ln |v + A| - \ln |v - A| = 2A\gamma t + \ln C. \quad (13.76)$$

将积分常数记作 $\ln C$, 重写为:

$$\left| \frac{v + A}{v - A} \right| = Ce^{2A\gamma t}. \quad (13.77)$$

设初始时刻 $t = 0$ 时, 速度为 v_0 , 则:

$$\left| \frac{v_0 + A}{v_0 - A} \right| = C. \quad (13.78)$$

从而:

$$\left| \frac{v + A}{v - A} \right| = \left| \frac{v_0 + A}{v_0 - A} \right| e^{2A\gamma t}. \quad (13.79)$$

由于 $A > 0$ 且取向向下为正方向使得 $v > 0$, 我们可写成:

$$\frac{v + A}{|v - A|} = \frac{v_0 + A}{|v_0 - A|} e^{2A\gamma t}. \quad (13.80)$$

进一步讨论不同初始速度的情况:

- 若 $v_0 > A$, 可直接去掉绝对值。
- 若 $v_0 < A$, 则 $v < A$, 也可去掉绝对值。

因此:

$$\frac{v + A}{v - A} = \frac{v_0 + A}{v_0 - A} e^{2A\gamma t}. \quad (13.81)$$

解得:

$$\begin{aligned} v &= A \frac{(v_0 + A) e^{2A\gamma t} + v_0 - A}{(v_0 + A) e^{2A\gamma t} - (v_0 - A)} \\ &= A \frac{v_0 (e^{2A\gamma t} + 1) + A (e^{2A\gamma t} - 1)}{v_0 (e^{2A\gamma t} - 1) + A (e^{2A\gamma t} + 1)} \\ &= A \frac{v_0 \cosh(A\gamma t) + A \sinh(A\gamma t)}{v_0 \sinh(A\gamma t) + A \cosh(A\gamma t)}. \end{aligned} \quad (13.82)$$

注意

- 当 $t = 0$, 有 $v = v_0$, 符合初始条件。
- 当 $t \rightarrow \infty$, 速度收敛至 $A = \sqrt{g/\gamma}$, 即终端速度。

终端速度是重力与空气阻力相等时的速度, 此时加速度为零。因此, 终端速度可直接由牛顿第二定律求出, 而不必解微分方程。

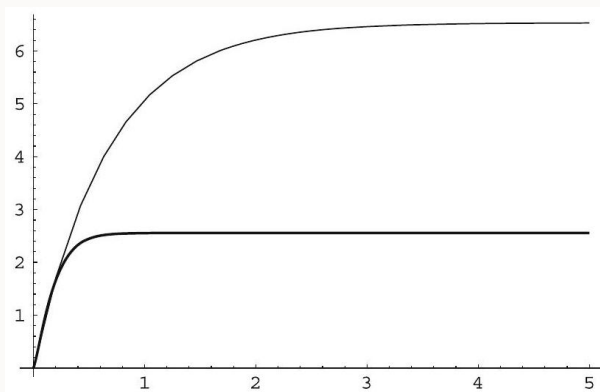


图 103: 阻力与速度的平方成正比时 (粗线), 终端速度达到的时间远短于阻力与速度成正比的情况 (细线), 且终端速度更小。

图 103 显示了两种空气阻力情况下速度随时间的变化。由于 v^2 阻力随速度增长更快, 其终端速度达到得更快, 并且终端速度也更小。因此, 在降落伞设计中, 利用较大的表面积以增强 v^2 阻力, 从而有效降低终端速度。

例 13.5 我们考虑两个具有可解形式的一阶非线性微分方程的例子。

(a) 伯努利一阶非线性微分方程 伯努利 (Bernoulli) 方程的标准形式为:

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0, \quad \text{其中 } n \neq 1. \quad (13.83)$$

我们设 $y = u^r$, 并适当选择 r 以化简方程。将其代入后得到:

$$u' + \frac{p(x)}{r}u + \frac{q(x)}{r}u^{nr-r+1} = 0. \quad (13.84)$$

如果我们希望使最后一项中的幂次为 1, 则需要 $r = 0$, 这显然是不合理的。但如果我们选择幂次为 0, 即:

$$nr - r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{1-n}, \quad (13.85)$$

则微分方程可化为一阶线性微分方程:

$$u' + (1-n)p(x)u + (1-n)q(x) = 0. \quad (13.86)$$

该方程为一阶线性微分方程, 其通解可以通过标准积分法求解。

(b) 齐次一阶微分方程 齐次型的一阶微分方程可写为¹⁷：

$$\frac{dy}{dx} = w\left(\frac{y}{x}\right), \quad (13.87)$$

其中 w 是某个已知齐次函数¹⁸。我们引入替换 $u = \frac{y}{x}$ ，从而有：

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}. \quad (13.88)$$

将其代入原方程得：

$$u + x \frac{du}{dx} = w(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{w(u) - u}{x}. \quad (13.89)$$

该式可分离变量，得到：

$$\frac{du}{w(u) - u} = \frac{dx}{x}. \quad (13.90)$$

两边积分得到通解：

$$\ln x = \int_c^u \frac{dt}{w(t) - t} \quad \text{或} \quad x = \exp\left(\int_c^{y/x} \frac{dt}{w(t) - t}\right), \quad (13.91)$$

其中 c 为由初始条件确定的常数。

¹⁷术语“homogeneous（齐次）”也可用于描述形如 $\mathbf{L}y = 0$ 的线性齐次微分方程，其中 $\mathbf{L}$ 是一个线性微分算符。例如：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

就是一个线性齐次二阶微分方程。需要注意的是，这种“齐次”与“齐次型一阶方程”（如 $\frac{dy}{dx} = w(y/x)$ ）中的“齐次”是不同的概念，切勿混淆。

¹⁸在这里，“齐次”是指函数 $f(x, y)$ 满足对于任意常数 k ，有

$$f(kx, ky) = f(x, y)$$

即同时缩放 x 和 y 时函数值不变。

14 二阶线性微分方程

在物理学中,大多数问题在忽略所谓的非线性项后,会化简为二阶线性微分方程。因此,对二阶线性微分方程的性质和求解方法进行系统研究是必要的。本节研究它们的一般性质,而具体的求解方法将在下一节及后续章节讨论。

最一般的二阶线性微分方程形式为:

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = p_3(x). \quad (14.1)$$

将方程两侧同时除以 $p_2(x)$, 并定义:

$$p(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \quad q(x) = \frac{p_0(x)}{p_2(x)}, \quad r(x) = \frac{p_3(x)}{p_2(x)}, \quad (14.2)$$

可以将方程化为标准形式:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x). \quad (14.3)$$

如果 $p_2(x) \neq 0$, 则方程 (14.3) 与方程 (14.1) 是等价的。若 $p_2(x)$ 在某些点上为零, 则这些点称为该微分方程的奇点。

注意 线性微分方程的奇点与非线性微分方程的奇点有本质区别。例如, 考虑一个非线性方程:

$$(x^2 - y)y' = x^2 + y^2. \quad (14.4)$$

在该方程中, 曲线 $y = x^2$ 处的点都是奇点。这意味着在 x 轴的区间 $I = [a, b]$ 上无法构造一个定义良好的解 $y = f(x)$, 因为在 $a < x < b$ 内存在使方程无定义的 $y = x^2$ 。另一方面, 线性微分方程不具有此类问题, 因为其导数的系数仅依赖于 x 。因此, 所有的奇点都位于垂直于 x 轴的直线上, 这使得可以在 x 轴上找到使方程性质良好的区间。¹⁹

14.1 线性性、叠加原理与解的唯一性

一阶线性微分方程只有一个解, 见(13.71), 而二阶线性微分方程可能有(事实上确实有)不止一个解。因此, 理解一个二阶线性微分方程解的数量及它们之间的关系是非常重要的。

我们将方程 (14.1) 表示为:

$$\mathbf{L}[y] = p_3(x), \quad \text{其中} \quad \mathbf{L} := p_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x) \quad (14.5)$$

$\mathbf{L}$ 是一个线性算符, 意思是对于任意常数 α 与 β , 以及任意函数 $y_1(x), y_2(x)$, 有

$$\mathbf{L}[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha \mathbf{L}[y_1] + \beta \mathbf{L}[y_2]$$

¹⁹打个比方, 可以想象线性方程的奇点是“固定障碍”, 比如路上的几块石头, 而非线性方程的奇点则像是整条河流或墙, 把你“逼着”在解的过程中绕行, 甚至无法穿越——这种限制不只是局部的, 而是结构性的。

设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (14.5) 的两个解, 则其差 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次方程 (即 $p_3(x) = 0$) 的解。

叠加原理: 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次 (homogeneous) 二阶线性微分方程的两个解, 则对于任意常数 α, β , 函数

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

也是该齐次方程的解。

基于物理直觉, 如果我们已知一个系统所满足的微分方程, 并且掌握了系统的初始条件, 那么我们就应当能够预测该系统的演化行为。进一步而言, 物理经验还告诉我们: 若初始条件发生无穷小的改变, 则系统的解也应发生无穷小的变化。因此, 线性微分方程的解通常被认为是关于初始条件的连续函数。然而, 非线性微分方程的情况则截然不同: 对于两个极为接近的初始条件, 其对应的解可能在后续时间演化中呈现出截然不同的行为。这种现象导致了解的不稳定性, 即使初始条件微小不可控的扰动也会产生巨大的差异。由于在实际物理问题中, 我们不可能以数学上严格的精度指定初始条件, 非线性微分方程往往具有不可预测性, 甚至表现为混沌现象 (chaos)。

定理 14.1 在区间 $[a, b]$ 上, 若函数 $g(x)$ 满足齐次二阶线性微分方程

$$g''(x) + p(x)g'(x) + q(x)g(x) = 0, \quad (14.6)$$

并且满足初始条件

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0,$$

则 $g(x) \equiv 0$ 是唯一解, 即 $g(x)$ 为平凡解。

定理 14.2 (唯一性定理) 若函数 $p(x), q(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则对于二阶线性微分方程 (14.3) 任意一组初始条件至多存在一个解。

证明: 设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是方程 (14.3) 在区间 $[a, b]$ 上的两个解, 且满足相同的初始条件:

$$f_1(a) = f_2(a) = c, \quad f_1'(a) = f_2'(a) = c', \quad (14.7)$$

其中 c 与 c' 为给定常数。定义差函数 $g(x) := f_1(x) - f_2(x)$, 则 $g(x)$ 满足如下齐次线性微分方程:

$$g'' + p(x)g' + q(x)g = 0, \quad (14.8)$$

即对应非齐次项为 $r(x) = 0$ 。同时由初始条件有:

$$g(a) = f_1(a) - f_2(a) = 0, \quad g'(a) = f_1'(a) - f_2'(a) = 0. \quad (14.9)$$

由定理 14.1, 因此有:

$$g(x) \equiv 0 \Rightarrow f_1(x) = f_2(x). \quad (14.10)$$

证毕。

定理 14.3 设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是齐次二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (14.11)$$

的两个解, 其中 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数。若向量 $(f_1(a), f_1'(a))$ 与 $(f_2(a), f_2'(a))$ 线性无关, 则该齐次方程在 $[a, b]$ 上的任一解 $g(x)$ 都可表示为如下形式的线性组合:

$$g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (14.12)$$

其中 c_1 与 c_2 为常数。函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 被称为该齐次微分方程的一组解基 (basis of solutions)。

证明: 定义向量

$$\mathbf{v}_1 := (f_1(a), f_1'(a)), \quad \mathbf{v}_2 := (f_2(a), f_2'(a)),$$

设 $g(x)$ 是 (14.11) 的任意解。由于 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$ 线性无关, 向量 $(g(a), g'(a))$ 可以唯一表示为 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{v}_2$ 的线性组合, 即存在唯一常数 c_1 与 c_2 使得

$$\begin{aligned} g(a) &= c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a), \\ g'(a) &= c_1 f_1'(a) + c_2 f_2'(a). \end{aligned}$$

考虑函数

$$u(x) := g(x) - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x),$$

则 $u(x)$ 同样满足微分方程 (14.11), 且初始条件为

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 0.$$

由定理 14.1 可知, $u(x) \equiv 0$, 从而 $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ 。

注意 唯一性定理说明, 对于一个满足给定初始条件的二阶线性微分方程, 其解至多唯一。但该定理本身并不保证解一定存在。若对方程的系数函数作出适当假设, 则可以证明解的确存在。本讲义并不证明一般情形下的存在性定理 (existence theorem), 但我们将在本章及后续两章中讨论若干特定情形下的解法。

14.2 朗斯基行列式

为了构成解的一个基, 函数 f_1 与 f_2 必须是线性无关的。对于定义在区间 $[a, b]$ 上的若干函数, 其线性无关性是一个必须在整个区间 $[a, b]$ 上都成立的概念。也就是说, 即使存在某一点 $x_0 \in [a, b]$, 使得

$$\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n(x_0) = 0, \quad (14.13)$$

这也不足以说明这些函数是线性相关的。线性相关的定义要求上述等式对所有 $x \in [a, b]$ 都成立。

判断两个函数 f_1 和 f_2 是否线性相关, 可以借助于它们的朗斯基行列式 (Wronskian)。

定义 14.1 任意两个可微函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的朗斯基行列式定义为

$$W(f_1, f_2; x) := f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}. \quad (14.14)$$

定理 14.4 设 f_1 与 f_2 是微分方程 (14.11) 的两个解, 则它们的朗斯基行列式在区间 $[a, b]$ 上符号不变。特别地, 若朗斯基行列式在某点为零, 则在整个区间 $[a, b]$ 上恒为零。

证明: 我们对朗斯基行列式求导, 并代入二阶线性齐次微分方程 (14.11), 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(f_1, f_2; x) &= f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1'' \\ &= f_1(-p f_2' - q f_2) - f_2(-p f_1' - q f_1) \\ &= p f_1' f_2 - p f_1 f_2' \\ &= -p(x) W(f_1, f_2; x) \end{aligned} \quad (14.15)$$

这是一个一阶线性微分方程, 其通解为:

$$\frac{dW}{dx} = -pW \Rightarrow \frac{dW}{W} = -p dx \Rightarrow \ln W = - \int_c^x p(t) dt + \ln C, \quad (14.16)$$

其中 c 是区间 $[a, b]$ 中的任意点, C 是积分常数。显然有 $C = W(c)$, 因此可得:

$$W(f_1, f_2; x) = W(f_1, f_2; c) e^{-\int_c^x p(t) dt} \quad (14.17)$$

由于指数函数始终为正, 式 (14.17) 表明:

- 若 $W(f_1, f_2; c) = 0$, 则 $W(f_1, f_2; x) = 0$ 在整个区间 $[a, b]$ 上成立;
- 若 $W(f_1, f_2; c) \neq 0$, 则 $W(f_1, f_2; x)$ 在 $[a, b]$ 上处处与之同号。

定理 14.5 (朗斯基行列式与线性相关性的充要条件) 设 f_1 与 f_2 是在区间 $[a, b]$ 上处处不为零的可微函数, 则它们线性相关当且仅当其朗斯基行列式为零。

证明： 考虑两个可微函数 f_1 与 f_2 ，它们不一定是某个微分方程的解。若 f_1 与 f_2 线性相关，即存在常数 C 使得 $f_2 = Cf_1$ ，则它们的朗斯基行列式恒为零。反之，若

$$f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) = 0, \quad (14.18)$$

则有：

$$f_1 df_2 = f_2 df_1 \Rightarrow \frac{df_2}{f_2} = \frac{df_1}{f_1} \Rightarrow \ln f_2 = \ln f_1 + \ln C \Rightarrow f_2 = Cf_1.$$

例 14.1 设 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ ，定义在区间 $[-1, 1]$ 上。显然，在该区间内这两个函数是线性无关的，因为只有在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时，线性组合 $\alpha_1 x + \alpha_2 |x|$ 才恒等于零。另一方面，朗斯基行列式却在区间 $[-1, 1]$ 上恒为零：

解：

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2; x) &= x \frac{d|x|}{dx} - |x| \cdot \frac{dx}{dx} \\ &= x \frac{d|x|}{dx} - |x| \end{aligned} \quad (14.19)$$

由于

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \text{且} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0, \end{cases}$$

我们分段计算得：

$$W(f_1, f_2; x) = \begin{cases} x \cdot 1 - x = 0, & x > 0, \\ x \cdot (-1) - (-x) = -x + x = 0, & x < 0. \end{cases} \quad (14.20)$$

因此，除了 $x = 0$ 处不连续外，朗斯基行列式在整个 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 区间内恒为零。

注意 这看起来似乎与前述定理（朗斯基行列式恒为零 $\Rightarrow$ 函数线性相关）相矛盾。但其实并不矛盾，因为该定理的前提是假设两个函数在整个区间上都可微。而在本例中，函数 $f_2(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导，因此定理并不适用。

14.3 第二个解的构造

若我们已知齐次二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (14.21)$$

的一个解 $f_1(x)$, 则可以利用朗斯基行列式构造另一个与之线性无关的解 $f_2(x)$ 。

设 $W(x) := W(f_1, f_2; x)$ 为 f_1 与 f_2 的朗斯基行列式, 则由其定义及公式 (14.17) 可得:

$$f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) = W(x) = W(c) \exp\left(-\int_c^x p(t)dt\right), \quad (14.22)$$

其中 c 为区间 $[a, b]$ 上任意一点。

在已知 $f_1(x)$ 的前提下, 这是关于 $f_2(x)$ 的一阶线性微分方程。我们可使用一阶线性微分方程的积分因子法来求解。注意到 $1/f_1^2(x)$ 是一个积分因子。将上式两边除以 $f_1^2(x)$, 得到:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right] = \frac{W(x)}{f_1^2(x)}. \quad (14.23)$$

从而有

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = C + \int_{\alpha}^x \frac{W(s)}{f_1^2(s)} ds = C + \int_{\alpha}^x \frac{W(c)}{f_1^2(s)} \exp\left(-\int_c^s p(t)dt\right) ds, \quad (14.24)$$

其中 C 为积分常数, α 是区间 $[a, b]$ 中一个方便选取的点。因此, $f_2(x)$ 的通解形式为:

$$f_2(x) = f_1(x) \left\{ C + K \int_{\alpha}^x \frac{1}{f_1^2(s)} \exp\left(-\int_c^s p(t)dt\right) ds \right\}, \quad (14.25)$$

其中 K 代替了 $W(c)$, 是任意常数。

注意 在实际求解中, 我们并不需要事先知道 $W(x)$, 因为它依赖于 f_2 本身, 而我们正是希望构造 f_2 。事实上, 可以验证: 无论 K 取何值, 公式 (14.25) 所定义的函数 $f_2(x)$ 都满足微分方程 (14.11), 可作为读者的练习加以证明。

此外, 取 $x = \alpha$ 代入 (14.25) 可得:

$$f_2(\alpha) = C f_1(\alpha), \quad (14.26)$$

即 C 控制了解在 α 点的初值。在实际使用中, 常常为了使第二个解与 $f_1(x)$ 线性无关而选择 $C = 0$, 从而消去与 $f_1(x)$ 成正比的项。

例 14.2 使用公式 (14.25) 构造第二线性无关解的几个例子如下:

(a) 方程 $y'' - k^2 y = 0$

该微分方程的一个解为 $f_1(x) = e^{kx}$ 。利用构造公式, 设 $C = 0$ 且 $K = 1$, 由于 $p(x) = 0$, 得:

$$f_2(x) = e^{kx} \int_{\alpha}^x \frac{ds}{e^{2ks}} = -\frac{1}{2k} e^{-kx} + \frac{e^{-2k\alpha}}{2k} e^{kx}. \quad (14.27)$$

忽略与 $f_1(x)$ 成正比的第二项, 得到另一线性无关解为 $f_2(x) = e^{-kx}$ 。

(b) 方程 $y'' + k^2 y = 0$

这是一个描述简谐振动的方程，一个解为 $f_1(x) = \sin(kx)$ 。取 $C = 0$, $c = \alpha = \frac{\pi}{2k}$, $K = 1$, 得:

$$f_2(x) = \sin(kx) \int_{\pi/2k}^x \frac{ds}{\sin^2(ks)} = -\cos(kx). \quad (14.28)$$

$\sin(kx)$ 与 $\cos(kx)$ 线性无关，通解为:

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (14.29)$$

(c) 对上述解的朗斯基行列式计算

对例 (a) 中的两个解:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{kx} & ke^{kx} \\ e^{-kx} & -ke^{-kx} \end{pmatrix} = -2k. \quad (14.30)$$

对例 (b) 中的两个解:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \sin(kx) & k \cos(kx) \\ \cos(kx) & -k \sin(kx) \end{pmatrix} = -k. \quad (14.31)$$

在这两个例子中，朗斯基行列式均为常数。容易证明对所有形如

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (14.32)$$

的二阶齐次线性微分方程，其任意两个解的朗斯基行列式恒为常数。

数学物理中所使用的大多数特殊函数，都是某类二阶线性齐次微分方程的解。这些函数在某些“特殊点”（如边界、奇点）附近的行为，通常由具体问题中的物理要求所决定。在许多情形下，物理条件会促使我们在两个线性无关解中优先选择其中一个。比如，尽管勒让德方程：

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (14.33)$$

有两个线性无关解，但物理问题中最常遇到的解是勒让德多项式 $P_n(x)$ ，它在后续章节中将被系统讨论。另一个线性无关解（通常具有奇异行为）可以通过我们在公式 (14.25) 中所介绍的方法，即通过已知解构造第二解的方法得到。

14.4 非齐次二阶线性微分方程的通解

我们现在来讨论非齐次 (inhomogeneous) 二阶线性微分方程的通解形式。设

$$\mathbf{L}[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (14.34)$$

是一个已知的非齐次微分方程, $g(x)$ 是该方程的一个特解。

若 $h(x)$ 是此方程的任意一个解, 则 $h(x) - g(x)$ 显然满足对应的齐次方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (14.35)$$

根据定理14.3, 齐次方程的通解可以写作其两个线性无关解 $f_1(x), f_2(x)$ 的线性组合, 因此我们有:

$$h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + g(x), \quad (14.36)$$

其中 c_1 与 c_2 为任意常数, $g(x)$ 为非齐次方程的一个特解。

定理 14.6 (非齐次二阶线性方程的通解) 设 $g(x)$ 是非齐次微分方程 (14.34) 的一个特解, $f_1(x), f_2(x)$ 是对应齐次方程 (14.35) 的两个线性无关解, 则该非齐次方程的通解为

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + g(x). \quad (14.37)$$

我们已经知道, 在已知一个齐次方程解的前提下, 可以利用朗斯基行列式构造第二个线性无关解。下面将进一步说明: 在仅已知一个齐次解的情况下, 我们同样可以构造出对应非齐次方程的一个特解。我们采用的方法称为常数变易法 (method of variation of constants)。

设 $f_1(x), f_2(x)$ 是齐次方程的两个已知解, $g(x)$ 是非齐次方程 (14.34) 的一个待求特解。我们设

$$g(x) = f_1(x)v(x), \quad (14.38)$$

其中 $v(x)$ 为待定函数。将其代入方程 (14.34), 得到关于 $v(x)$ 的微分方程:

$$v'' + \left(p(x) + \frac{2f_1'}{f_1} \right) v' = \frac{r(x)}{f_1(x)}. \quad (14.39)$$

这是一个关于 $v'(x)$ 的一阶线性微分方程, 其解为 (习题):

$$v'(x) = \frac{W(x)}{f_1^2(x)} \left[C + \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt \right], \quad (14.40)$$

其中 $W(x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的朗斯基行列式。

注意到

$$\frac{W(x)}{f_1^2(x)} = \frac{f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)}{f_1^2(x)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right), \quad (14.41)$$

我们将其代入上式, 并取 $C = 0$ (因为我们只关心一个特解), 得到

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right) \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt \right] - \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt}_{= \frac{f_1(x)r(x)}{W(x)}}. \end{aligned} \quad (14.42)$$

对上式积分得到:

$$v(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt - \int_a^x \frac{f_2(t)r(t)}{W(t)} dt. \quad (14.43)$$

因此, $g(x) = f_1(x)v(x)$ 是非齐次方程的一个特解, 其最终表达式为:

$$g(x) = f_2(x) \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)} dt - f_1(x) \int_a^x \frac{f_2(t)r(t)}{W(t)} dt. \quad (14.44)$$

注意 在公式 (14.44) 中, f_1 与 f_2 出现得极为对称。这也是常数变易法的一大特点。

定理 14.7 若已知一个齐次解 $f_1(x)$, 则可利用公式 (14.25) 构造第二个线性无关解 $f_2(x)$, 再利用公式 (14.44) 构造非齐次方程的一个特解 $g(x)$ 。最终, 非齐次方程 (14.34) 的通解为:

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + g(x), \quad (14.45)$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

14.5 施图姆-刘维尔理论

对偏微分方程进行变量分离，通常会引出如下形式的常微分方程：

$$\mathbf{L}[u] + \lambda u = 0, \quad \text{或写作} \quad p_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x)u + \lambda u = 0, \quad (14.46)$$

其中 $u = u(x)$ 是某个单变量函数， λ 是一个待定常数。该方程是微分算子 $\mathbf{L}$ 的一个特征值问题，类似矩阵特征值问题： $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ 。

在这一节中，我们将学习这类微分方程的特征值问题的性质。在此之前，我们需要引入一个概念：伴算子。

14.5.1 伴算子

考虑如下二阶齐次线性微分方程所定义微分算子 $\mathbf{L}$ ：

$$\mathbf{L}[y] := p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \quad (14.47)$$

若该算子可以写成如下形式：

$$\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx} [A(x)y' + B(x)y], \quad (14.48)$$

则称该微分算子 $\mathbf{L}$ 为恰当的。

微分算子 $\mathbf{L}$ 的一个积分因子是一个函数 $\mu(x)$ ，使得 $\mu(x)\mathbf{L}[y]$ 是恰当的。若存在积分因子 $\mu(x)$ ，则方程 (14.47) 可被化简为：

$$\frac{d}{dx} [A(x)y' + B(x)y] = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x)y' + B(x)y = C, \quad (14.49)$$

这是一个右端为常数的一阶线性微分方程，其通解可由定理 13.3 给出。更一般地，即使是与 (14.47) 对应的非齐次方程也可以求解。事实上，若有：

$$\begin{aligned} \mu(x)\mathbf{L}[y] = \mu(x)r(x) &\Rightarrow \frac{d}{dx} [A(x)y' + B(x)y] = \mu(x)r(x) \\ &\Rightarrow A(x)y' + B(x)y = \int_{\alpha}^x \mu(t)r(t)dt, \end{aligned} \quad (14.50)$$

则仍然转化为一个一阶线性微分方程。因此，积分因子的存在意味着可以完全求解一个二阶线性微分方程（无论是否齐次）。由此可见，判断一个微分方程是否存在积分因子是非常重要的。

若微分方程 (14.47) 是恰当的，则其形式应满足 (14.48)，这意味着两者对应项应相等，即：

$$p_2 = A, \quad p_1 = A' + B, \quad p_0 = B'. \quad (14.51)$$

由此可得：

$$p_2'' = A'', \quad p_1' = A'' + B', \quad p_0 = B', \quad (14.52)$$

将这些式子组合，得到一个必要条件：

$$p_2'' - p_1' + p_0 = 0. \quad (14.53)$$

反过来, 若条件 (14.53) 成立, 我们可以将其代入微分方程左边, 从而验证其确实为恰当方程。注意到:

$$p_0 = -p_2'' + p_1', \quad (14.54)$$

将其代入 (14.47) 左端, 得到:

$$\begin{aligned} p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y &= p_2 y'' + p_1 y' + (-p_2'' + p_1') y \\ &= p_2 y'' - p_2'' y + (p_1 y)' \\ &= (p_2 y' - p_2' y)' + (p_1 y)' \\ &= \frac{d}{dx} (p_2 y' - p_2' y + p_1 y), \end{aligned} \quad (14.55)$$

从而将原方程化为 (14.48) 形式, 说明它确实是一个恰当的微分方程。

定理 14.8 (恰当微分方程的判据) 设二阶线性微分方程具有如下形式:

$$\mathbf{L}[y] = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y, \quad (14.56)$$

则该方程是恰当的, 当且仅当:

$$p_2''(x) - p_1'(x) + p_0(x) = 0. \quad (14.57)$$

一般的二阶线性微分方程通常不是恰当的。那么我们是否可以像处理一阶线性微分方程那样, 通过乘以一个适当的积分因子 $\mu(x)$ 将其化为恰当形式呢?

由定理 14.8 可得以下重要推论:

推论 (积分因子的判据) 函数 $\mu(x)$ 是微分方程 (14.47) 的积分因子, 当且仅当它满足如下齐次二阶微分方程:

$$\mathbf{M}[\mu] := (p_2 \mu)'' - (p_1 \mu)' + p_0 \mu = 0. \quad (14.58)$$

我们可以将 (14.58) 展开为更显式的形式:

$$p_2 \mu'' + (2p_2' - p_1) \mu' + (p_2'' - p_1' + p_0) \mu = 0, \quad (14.59)$$

该式可视为关于 $\mu(x)$ 的一个新的二阶线性微分方程。因此, 我们可以引入如下微分算子 $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} := p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + (2p_2'(x) - p_1(x)) \frac{d}{dx} + (p_2''(x) - p_1'(x) + p_0(x)), \quad (14.60)$$

称其为算子 $\mathbf{L}$ 的伴算子 (adjoint operator), 记作:

$$\mathbf{M} := \mathbf{L}^\dagger. \quad (14.61)$$

定理 14.5.1 说明, 积分因子的存在性可以通过解方程 (14.59) 来判断。然而, 构造该积分因子 $\mu(x)$ 实际上需要求解一个新的二阶微分方程, 其复杂性与原始微分方程本身不相上下。这与一阶线性微分方程形成鲜明对比: 在一阶方程的情形下, 积分因子可以通过一次积分显式给出。

尽管二阶线性微分方程的积分因子不像一阶方程那样易用，但它们在研究性质时仍具有重要作用。首先注意：微分算子的伴算子的伴算子是其本身（习题），即

$$(\mathbf{L}^\dagger)^\dagger = \mathbf{L}. \quad (14.62)$$

这意味着，如果 v 是 $\mathbf{L}[u]$ 的积分因子，则 u 也将是 $\mathbf{L}^\dagger[v] = \mathbf{M}[v]$ 的积分因子。将 $\mathbf{L}[u]$ 乘以 v ，将 $\mathbf{M}[v]$ 乘以 u ，并相减，有：

$$v\mathbf{L}[u] - u\mathbf{M}[v] = (vp_2)u'' - u(p_2v)'' + (vp_1)u' + u(p_1v)', \quad (14.63)$$

可整理为：

$$v\mathbf{L}[u] - u\mathbf{M}[v] = \frac{d}{dx} [p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv]. \quad (14.64)$$

对 (14.64) 从 $x = a$ 到 $x = b$ 积分，得到：

$$\int_a^b (v\mathbf{L}[u] - u\mathbf{M}[v]) dx = [p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv] \Big|_a^b. \quad (14.65)$$

式 (14.64) 与 (14.65) 称为拉格朗日恒等式 (Lagrange identities)。

类似于矩阵的对称性，微分算子的自伴性也是一种非常重要的结构。若有：

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^\dagger, \quad (14.66)$$

则称 $\mathbf{L}$ 是一个自伴算子 (self-adjoint operator)。

根据 $\mathbf{L}[y]$ 与 $\mathbf{L}^\dagger[y]$ 的结构比较（见 (14.47) 与 (14.59)），要求成立下列等式：

$$2p_2' - p_1 = p_1, \quad p_2'' - p_1' + p_0 = p_0. \quad (14.67)$$

第一式即 $p_2' = p_1$ ，代入第二式可验证自动成立。此时原方程可简化为：

$$\mathbf{L}[y] = p_2y'' + p_2'y' + p_0y = \frac{d}{dx} \left[p_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + p_0(x)y = 0. \quad (14.68)$$

是否所有的二阶线性微分方程都能化为自伴形式？答案是肯定的。我们可以通过将 (14.47) 两边同时乘以某个函数 $w(x)$ ，将其转化为自伴方程。设：

$$w(x) \cdot [p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y] = 0, \quad (14.69)$$

我们希望此新方程具有自伴结构。这要求：

$$wp_1 = (wp_2)', \quad \text{即} \quad p_2w' + w(p_2' - p_1) = 0. \quad (14.70)$$

该方程是关于 $w(x)$ 的一阶线性微分方程，其通解为：

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right]. \quad (14.71)$$

我们由此得到以下定理：

定理 14.9 二阶线性微分方程

$$\mathbf{L}[y] = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \quad (14.72)$$

是自伴的, 当且仅当 $p_2'(x) = p_1(x)$, 此时方程可以写为:

$$\frac{d}{dx} \left[p_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + p_0(x)y = 0. \quad (14.73)$$

若不满足该条件, 则可以乘以如下函数 $w(x)$ 使其化为自伴形式:

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right]. \quad (14.74)$$

例 14.3 以下两个例子展示了如何通过乘以适当的函数, 将原本非自伴的二阶微分方程转化为自伴形式。

解:

(a) 勒让德方程 (Legendre Equation)

其标准形式为:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0, \quad (14.75)$$

显然不是自伴形式。乘以函数 $w(x) = 1 - x^2$ 后, 方程变为:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad (14.76)$$

进一步可写成:

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)y'] + \lambda y = 0, \quad (14.77)$$

显然为自伴形式。

(b) 贝塞尔方程 (Bessel Equation)

其标准形式为:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (14.78)$$

该方程同样不是自伴的。乘以函数 $h(x) = x$ 后, 得到:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(x - \frac{n^2}{x} \right)y = 0, \quad (14.79)$$

此形式为典型的自伴结构。

14.5.2 施图姆-刘维尔系统 (Sturm-Liouville System)

既然我们已经知道每一个二阶线性微分方程都可以被转化为自伴形式, 现在我们将此程序应用于前面提到的微分方程 (14.46)。

将该方程两边乘以定理 14.9 中给出的函数 $w(x)$ ，即可将其转化为自伴形式。方程可写为：

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + [\lambda w(x) - q(x)] u = 0, \quad (14.80)$$

$$\text{或写作 } \mathbf{L}[u] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = -\lambda w(x)u, \quad (14.81)$$

其中，

$$p(x) = w(x)p_2(x), \quad q(x) = -w(x)p_0(x). \quad (14.82)$$

方程 (14.81) 被称为施图姆-刘维尔方程 (Sturm-Liouville equation) 的标准形式。设 $\mathbf{L}$ 是自伴微分算子，则拉格朗日恒等式为 (参见 (14.64))：

$$u\mathbf{L}[v] - v\mathbf{L}[u] = \frac{d}{dx} \{ p(x) [u(x)v'(x) - v(x)u'(x)] \}. \quad (14.83)$$

设 $u = u_1$ 是对应特征值 λ_1 的解， $v = u_2$ 是对应特征值 λ_2 的解 (都满足方程 (14.81))，则左边为：

$$\begin{aligned} u_1\mathbf{L}[u_2] - u_2\mathbf{L}[u_1] &= u_1(-\lambda_2 w u_2) + u_2(\lambda_1 w u_1) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) w u_1 u_2. \end{aligned} \quad (14.84)$$

对式 (14.83) 从 $x = a$ 到 $x = b$ 积分，得到：

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x) u_1(x) u_2(x) dx = [p(x) (u_1 u_2' - u_2 u_1')]_a^b. \quad (14.85)$$

自伴微分方程的一个重要性质是：当两个解对应于不同的特征值时，它们在带权内积意义下是正交的。这个正交性可以由拉格朗日恒等式 (14.85) 推导而来。若该恒等式右端边界项为零，即

$$[p(x) (u_1 u_2' - u_2 u_1')]_a^b = 0,$$

则可得

$$\int_a^b w(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0,$$

即 u_1 与 u_2 在权函数 $w(x)$ 所定义的内积下正交。我们希望通过施加合适的边界条件来确保该边界项为零。常见的两类边界条件如下：

- 分离型边界条件 (separated boundary conditions)：

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (14.86)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为实数。

- 周期边界条件 (periodic boundary conditions)：

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b). \quad (14.87)$$

总结，一个施图姆-刘维尔系统 (Sturm-Liouville system) 由以下两部分组成：

- 一个形如

$$\mathbf{L}[u] = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -\lambda w(x)u$$

的自伴微分算子;

- 一组使得拉格朗日恒等式边界项为零的边界条件, 例如 (14.86) 或 (14.87)。

例 14.4 施图姆-刘维尔系统的正交性是其重要性质之一。我们将通过三个例子来说明这一点。

(a) 贝塞尔方程中的正交性

固定 ν 时, 考虑下列微分方程:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u = 0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad (14.88)$$

令 $x = kr$, 可将其变换为贝塞尔方程

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) u = 0.$$

因为 $J_\nu(x)$ 是整函数, 在 $r = 0$ 附近解析且对应特征值 k^2 的解为 $u_k(r) = J_\nu(kr)$ 。若 k_1^2 和 k_2^2 是两个不同特征值, 对应特征解为 $J_\nu(k_1 r)$ 与 $J_\nu(k_2 r)$ 。此时, 正交性成立当且仅当边界项为零, 即:

$$\left\{ r [J_\nu(k_1 r) J'_\nu(k_2 r) - J_\nu(k_2 r) J'_\nu(k_1 r)] \right\}_0^b = 0,$$

这等价于:

$$J_\nu(k_1 b) J'_\nu(k_2 b) - J_\nu(k_2 b) J'_\nu(k_1 b) = 0.$$

一种常见的选择是令 $J_\nu(k_i b) = 0$, 即选取 $k_i b$ 为 J_ν 的不同零点。因此, 对不同零点 k_i, k_j , 有:

$$\int_0^b r J_\nu(k_i r) J_\nu(k_j r) dr = 0, \quad \text{当 } i \neq j.$$

(b) 勒让德方程中的正交性

考虑勒让德方程:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + \lambda u = 0, \quad -1 < x < 1.$$

该方程本身已是自伴的, 权函数 $w(x) = 1$, 系数函数 $p(x) = 1 - x^2$ 。当 $\lambda = n(n+1)$ 时, 其解为勒让德多项式 $P_n(x)$ 。由于边界项在 $x = \pm 1$ 处为零, 可得正交关系:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{当 } n \neq m.$$

(c) 埃尔米特方程 (Hermite equation) 中的正交性

考虑埃尔米特方程:

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0. \quad (14.89)$$

乘以权函数 $w(x) = e^{-x^2}$ 后可转化为施图姆-刘维尔形式:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{du}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} u = 0. \quad (14.90)$$

若 u 是方程 (14.89) 的解, 则它也是 (14.90) 的本征函数, 对应特征值 λ 。当 $\lambda = 2n$ 时, 其解为埃尔米特多项式 $H_n(x)$ 。两个对应不同特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的解 $u_1(x), u_2(x)$ 对应的边界项为:

$$\left\{ e^{-x^2} [u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)] \right\}_a^b.$$

当积分区间为 $(-\infty, +\infty)$ 时, 上式为零, 因此得到正交关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0, \quad \text{当 } n \neq m.$$

14.6 常系数线性微分方程

常系数的二阶线性微分方程在物理与工程中非常常见,且它们的求解相对简单。实际上,我们无需将讨论局限于二阶情形,而可以推广到任意阶。最一般的 n 阶线性微分方程 (NOLDE, n th-order linear differential equation) 在常系数情形下可表示为:

$$\mathbf{L}[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x), \quad (14.91)$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 为常数, $r(x)$ 为已知函数,称为非齐次项。若将 $r(x)$ 取为零,即

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (14.92)$$

则得到对应的齐次 n 阶线性微分方程 (homogeneous NOLDE, 简称 HNOLDE)。

14.6.1 齐次情形

考虑如下 n 阶常系数齐次线性微分方程:

$$\mathbf{L}[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (14.93)$$

我们尝试指数型解的代换:

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

代入方程 (14.93), 得到:

$$\mathbf{L}[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0.$$

由于 $e^{\lambda x} \neq 0$, 所以上式成立当且仅当 λ 满足以下代数方程:

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (14.94)$$

这被称为**特征多项式** (characteristic polynomial)。根据代数基本定理, $p(\lambda)$ 可以分解为:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \quad (14.95)$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $p(\lambda)$ 的不同根 (可以是实数或复数), 每个根的重数分别为 $k_1, \dots, k_m$, 满足 $k_1 + \cdots + k_m = n$ 。为简化记号, 我们引入微分算符

$$\mathbf{D} := \frac{d}{dx},$$

则算子 $\mathbf{L}$ 可写作:

$$\mathbf{L} = p(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{D} + a_0. \quad (14.96)$$

由于任意两个一次微分算子 $\mathbf{D} - \mu$ 与 $\mathbf{D} - \lambda$ 对于常数 μ, λ 是可交换的 (即它们交换律成立), 因此我们可以将 $\mathbf{L}$ 写成特征根对应的因式分解形式:

$$\mathbf{L} = p(\mathbf{D}) = (\mathbf{D} - \lambda_1)^{k_1} (\mathbf{D} - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\mathbf{D} - \lambda_m)^{k_m}. \quad (14.97)$$

为了求解齐次微分方程 (14.93) 的通解, 我们首先考虑以下基本事实:

$$(\mathbf{D} - \lambda)e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0, \quad (14.98)$$

即 $e^{\lambda x}$ 是 $\mathbf{D} - \lambda$ 的零解。进一步考虑带有多项式因子的函数 $x^r e^{\lambda x}$, 我们有:

$$(\mathbf{D} - \lambda)(x^r e^{\lambda x}) = \frac{d}{dx}(x^r e^{\lambda x}) - \lambda x^r e^{\lambda x} = r x^{r-1} e^{\lambda x}.$$

继续作用一次 $\mathbf{D} - \lambda$, 得到:

$$(\mathbf{D} - \lambda)^2(x^r e^{\lambda x}) = (\mathbf{D} - \lambda)(r x^{r-1} e^{\lambda x}) = r(r-1)x^{r-2} e^{\lambda x}.$$

一般地, 有:

$$(\mathbf{D} - \lambda)^k(x^r e^{\lambda x}) = r(r-1)\cdots(r-k+1)x^{r-k} e^{\lambda x}.$$

当 $k = r$ 时, 上式变为:

$$(\mathbf{D} - \lambda)^r(x^r e^{\lambda x}) = r! e^{\lambda x}. \quad (14.99)$$

若再作用一次, 即当 $k > r$ 时, 由 (14.98) 可得:

$$(\mathbf{D} - \lambda)^k(x^r e^{\lambda x}) = 0 \quad \text{当} \quad k > r \quad (14.100)$$

考虑特征多项式 $p(\lambda)$ 的分解式 (见 (14.95)) 中各根 λ_j 的重数 k_j , 我们可以构造下列函数集合:

$$\left\{x^{r_1} e^{\lambda_1 x}\right\}_{r_1=0}^{k_1-1}, \quad \left\{x^{r_2} e^{\lambda_2 x}\right\}_{r_2=0}^{k_2-1}, \quad \dots, \quad \left\{x^{r_m} e^{\lambda_m x}\right\}_{r_m=0}^{k_m-1},$$

上述所有函数都是微分方程 (14.93) 的解。以下进行验证: 以集合中第一组中的一个元素 $x^{r_1} e^{\lambda_1 x}$ 为例, 作用算符 $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[x^{r_1} e^{\lambda_1 x}] &= (\mathbf{D} - \lambda_1)^{k_1} (\mathbf{D} - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\mathbf{D} - \lambda_m)^{k_m} (x^{r_1} e^{\lambda_1 x}) \\ &= (\mathbf{D} - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\mathbf{D} - \lambda_m)^{k_m} \underbrace{(\mathbf{D} - \lambda_1)^{k_1} (x^{r_1} e^{\lambda_1 x})}_{=0, \text{ 因为 } k_1 > r_1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14.101)$$

因此, 这些函数确实构成了方程 (14.93) 的一组解。

若特征多项式 $p(\lambda)$ 的某个根 λ 是复数, 而微分方程 (14.93) 的系数都是实数, 则由共轭性质可知 λ^* 也是 $p(\lambda)$ 的根 (习题)。因此, 当

$$x^{r_j} e^{\lambda_j x}$$

是方程的解, 且 $\lambda_j \in \mathbb{C}$ 时, 其共轭函数

$$x^{r_j} e^{\lambda_j^* x}$$

也是解。设 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由欧拉公式,

$$e^{\lambda_j x} = e^{\alpha_j x} (\cos \beta_j x + i \sin \beta_j x),$$

结合线性性与实系数条件, 可得对应的两个实解:

$$x^{r_j} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \quad x^{r_j} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad \text{其中 } r_j = 0, 1, \dots, k_j - 1. \quad (14.102)$$

因此, 对于具有共轭复根的一组复解, 我们可以构造出完全由实函数组成的一组解。可以证明, 对于固定的 λ_j 和不同的 r_j , 函数族

$$x^{r_j} e^{\lambda_j x}, \quad r_j = 0, 1, \dots, k_j - 1$$

是线性无关的 (习题)。结合特征多项式的因式分解式 (14.95), 我们有:

$$\sum_{j=1}^m k_j = n,$$

因此所有的基本解函数总数为 n 个, 它们互相线性无关。

定理 14.10 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是实系数齐次微分方程 (14.93) 所对应特征多项式 $p(\lambda)$ 的 m 个不同根, 重数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 。则函数集合

$$\{x^{r_j} e^{\lambda_j x}\}, \quad \text{其中 } r_j = 0, 1, \dots, k_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

构成方程 (14.93) 的一组解的基矢, 通解由它们的线性组合给出。

例 14.5 考虑如下微分方程:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = 0, \quad \text{其中 } a, b > 0, \quad (14.103)$$

该方程在力学与电路系统中广泛出现。

解: 其特征多项式为:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

对应的根为:

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \quad (14.104)$$

根据判别式 $a^2 - 4b$ 的符号不同, 可区分三种不同的解行为:

(a) **过阻尼 (Overdamped)**, $a^2 > 4b$:

此时有两个不同实根, 均为重数为 1 的单根 ($k_1 = k_2 = 1$), 所以 $r_1 = r_2 = 0$ 。设:

$$\gamma := \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b},$$

则通解为:

$$y(t) = e^{-at/2} (c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}).$$

因为 $a > 2\gamma$, 该解随着时间单调衰减, $y(t) \rightarrow 0$ 当 $t \rightarrow \infty$ 。

(b) **临界阻尼 (Critically Damped)**, $a^2 = 4b$:

此时出现重根, 根的重数为 2 ($k_1 = 2$), 对应 $r = 0, 1$, 通解为:

$$y(t) = (c_0 + c_1 t) e^{-at/2}.$$

该解在 $t = 0$ 时为 $y(0) = c_0$, 并在 $t = \frac{2}{a} - \frac{c_0}{c_1}$ 处达到极值, 之后随时间衰减至零 (见习题)。

(c) 欠阻尼 (Underdamped), $a^2 < 4b$:

此时有一对共轭复根, 重数为 1 ($k_1 = k_2 = 1$), 设:

$$\omega := \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}, \quad \lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega, \quad \lambda_2 = \lambda_1^*.$$

通解为:

$$y(t) = e^{-at/2} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) = Ae^{-at/2} \cos(\omega t + \alpha),$$

表示一个幅度随时间衰减的简谐振荡。若 $a = 0$, 则振幅不衰减, 因此 a 被称为阻尼因子 (damping factor)。

物理解释 上述方程可描述两类系统:

- 机械系统: 一个质量为 m 的振子在粘滞流体中无外力作用下的运动:

$$a = \frac{\beta}{m}, \quad b = \frac{k}{m},$$

其中 β 为阻尼系数, $f_{\text{drag}} = \beta v$, k 为弹簧劲度系数。

- 电路系统: 一个由电阻 R 、电感 L 和电容 C 构成的 RLC 回路:

$$a = \frac{R}{L}, \quad b = \frac{1}{LC}.$$

阻尼因子与 R 和 L 的比值有关; 振荡频率为:

$$\omega = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

当 $R \geq 2\sqrt{L/C}$ 时, 系统不发生振荡。

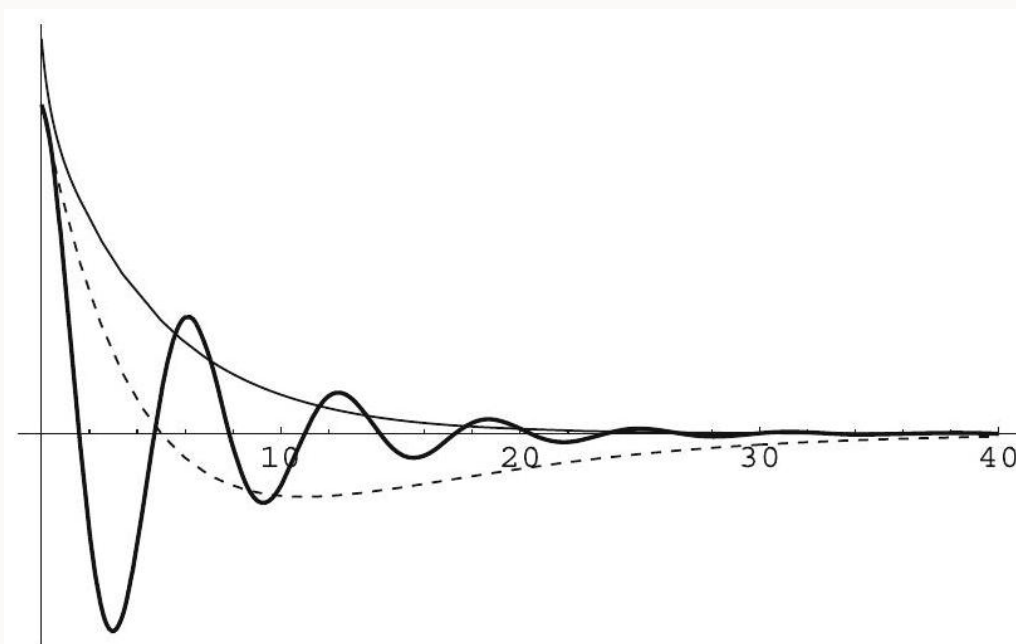


图 104: 不同阻尼情形下的系统响应曲线。细实线为过阻尼, 虚线为临界阻尼, 粗实线为欠阻尼。

14.6.2 非齐次情形 (The Inhomogeneous Case)

当一个外部驱动力作用于物理系统时，它通常表现为非齐次微分方程中的非齐次项。在常系数 n 阶线性微分方程中，若该非齐次项具有特定结构，例如由多项式与指数函数乘积构成的形式，则可以通过解析形式 (closed form) 给出其解。本小节将说明在这种情况下如何求解非齐次方程。

我们考虑下列 n 阶常系数线性微分方程 (与式 (14.91) 相应)：

$$\mathbf{L}[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x), \quad (14.105)$$

其中我们假设右端非齐次项具有如下形式：

$$r(x) = \sum_k p_k(x)e^{\lambda_k x}, \quad (14.106)$$

其中 $p_k(x)$ 为多项式， λ_k 为复常数。该微分方程的通解由两部分组成：

- 其对应齐次方程的一组基矢 (见定理 14.10 所述) 所张成的线性组合；
- 一个非齐次方程的特解，待求解。

由于 $\mathbf{L}$ 是一个线性算子，若 y_1 是 $\mathbf{L}[y] = r_1(x)$ 的一个特解， y_2 是 $\mathbf{L}[y] = r_2(x)$ 的一个特解，则 $y_1 + y_2$ 是 $\mathbf{L}[y] = r_1(x) + r_2(x)$ 的一个特解。因此，我们可以将右端非齐次项 $r(x)$ 拆解为若干个简单部分分别求解，并将对应特解相加即可。由此可知，不失一般性，我们可以只考虑如下形式的非齐次项：

$$r(x) = p(x)e^{\lambda x}, \quad (14.107)$$

其中 $p(x)$ 为一个多项式， λ 为常数。

容易验证，对于任意可微函数 $f(x)$ ，我们有如下公式：

$$(\mathbf{D} - \lambda) \left[e^{\lambda x} f(x) \right] = e^{\lambda x} f'(x), \quad (\mathbf{D} - \lambda)^2 \left[e^{\lambda x} f(x) \right] = e^{\lambda x} f''(x), \quad (14.108)$$

并且一般地，

$$(\mathbf{D} - \lambda)^k \left[e^{\lambda x} f(x) \right] = e^{\lambda x} \frac{d^k f}{dx^k}. \quad (14.109)$$

特别地，当 $p(x)$ 为一个次数为 n 的多项式时，我们有：

$$(\mathbf{D} - \lambda)^k u = e^{\lambda x} p(x), \quad (14.110)$$

其解可以写成

$$u = e^{\lambda x} q(x),$$

其中 $q(x)$ 是一个次数为 $n+k$ 的多项式，且是 $p(x)$ 的 k 次原函数 (不定积分)，即 $q^{(k)}(x) = p(x)$ 。

如果 $\nu \neq \lambda$ ，则可以验证：

$$(\mathbf{D} - \nu) \left[e^{\lambda x} f(x) \right] = e^{\lambda x} [(\lambda - \nu)f(x) + f'(x)], \quad (14.111)$$

因此, $(\mathbf{D} - \nu)u = e^{\lambda x}p(x)$ 的解可以写成:

$$u = e^{\lambda x}q(x),$$

其中 $q(x)$ 是次数为 k 的多项式。通过反复应用上述公式, 我们可以得出如下结论:

定理 14.11 非齐次常系数线性微分方程 $\mathbf{L}[y] = e^{\lambda x}S(x)$, 其中 $S(x)$ 是多项式, 具有如下特解:

$$e^{\lambda x}q(x),$$

其中 $q(x)$ 也是一个多项式。 $q(x)$ 的次数等于 $S(x)$ 的次数, 除非 $\lambda = \lambda_j$, λ_j 是 $\mathbf{L}$ 的特征多项式的根, 此时 $q(x)$ 的次数比 $S(x)$ 多 k_j , 即 λ_j 的重数。

一旦我们知道了非齐次微分方程的特解形式, 就可以通过代入方程并匹配两边的幂次来求解多项式中的系数。

例 14.6 我们求解两个微分方程, 并给出满足边界条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$ 的通解。

(a) 考虑微分方程:

$$y'' + y = xe^x. \quad (14.112)$$

其特征多项式为:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

其根为 $\lambda_1 = i$ 和 $\lambda_2 = -i$ 。因此, 解的基函数为 $\{\cos x, \sin x\}$ 。为了求得特解, 我们注意到非齐次项中指数部分的系数 $\lambda = 1$ 与特征方程的根 λ_1 和 λ_2 不同。因此, 特解的形式为:

$$q(x)e^x,$$

其中 $q(x) = Ax + B$ 是一个一次多项式 (与 $S(x) = x$ 的次数相同)。将 $u = (Ax + B)e^x$ 代入方程 (14.112), 得到:

$$Axe^x + (2A + B)e^x + (Ax + B)e^x = xe^x.$$

通过匹配系数, 得到:

$$2A = 1, \quad 2A + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

因此, 通解为:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x.$$

根据给定的边界条件, $y(0) = 0$ 给出 $c_1 - \frac{1}{2} = 0$, $y'(0) = 1$ 给出 $c_2 = 1$, 从而得到唯一解:

$$y = \frac{1}{2} \cos x + \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x.$$

(b) 考虑微分方程: 考虑微分方程:

$$y'' - y = xe^x. \quad (14.113)$$

其特征多项式为:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1,$$

其根为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$, 解的基函数为 $\{e^x, e^{-x}\}$ 。为了求得特解, 我们注意到非齐次项中的 $S(x) = x$ 和 $\lambda = 1$ 与 λ_1 重合。因此, $q(x)$ 必须是一个二次多项式, 因为 λ_1 是一个简单根 (即 $k_1 = 1$)。我们假设:

$$q(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow u = (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

对其求导并代入方程 (14.113), 得到两个方程:

$$4A = 1, \quad A + B = 0,$$

其解为 $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$ 。注意到 C 不能确定, 因为 Ce^x 是齐次方程的解 (对应于方程 (14.113))。因此, 通解为:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C \right) e^x.$$

由于 Ce^x 可以吸收到 $c_1 e^x$ 中, 我们设置 $C = 0$, 代入边界条件并求解, 得到唯一解:

$$y = \frac{5}{4} \sinh x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

非齐次微分方程 $\mathbf{L}[y] = r(x)$ 可以被视为一个“机器”或“黑盒”, 当一个函数 $r(x)$ 输入时, 它产生另一个函数 $y(x)$ 作为输出。这种解释在电路或声学滤波器的研究中非常常见。在这种背景下, 最重要的输入信号是具有如下形式的正弦函数:

$$r(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

其中 A 、 α 和 ω (角频率) 为常数, t 为时间 (自变量)。通过复数表示, 我们可以写成:

$$r(t) = \operatorname{Re}(R(t)), \quad \text{其中} \quad R(t) := B e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

这里 $B = A e^{i\alpha}$ 。假设 $i\omega$ 不是 $\mathbf{L}$ 的特征多项式 $p(\lambda)$ 的根, 则特解为复数形式 $U = C(\omega) e^{i\omega t}$, 其中 $C(\omega)$ 是依赖于 ω 的常数。为了求解 $C(\omega)$, 我们将 U 代入方程 $\mathbf{L}[U] = B e^{i\omega t}$, 得到:

$$\mathbf{L}[U] = \mathbf{L}[C(\omega) e^{i\omega t}] = C(\omega) \mathbf{L}[e^{i\omega t}] = C(\omega) p(i\omega) e^{i\omega t}.$$

因此, 方程变为:

$$\mathbf{L}[U] = B e^{i\omega t} \Rightarrow C(\omega) p(i\omega) e^{i\omega t} = B e^{i\omega t} \Rightarrow C(\omega) = \frac{B}{p(i\omega)}.$$

接下来, 我们将复数写成极坐标形式:

$$C(\omega) := \rho(\omega) e^{i\gamma(\omega)}, \quad B = A e^{i\alpha}, \quad p(i\omega) := P(\omega) e^{i\theta(\omega)}.$$

得到:

$$\rho(\omega) = \frac{A}{P(\omega)}, \quad \gamma(\omega) = \alpha - \theta(\omega).$$

因此, 实解 $u(t) = \operatorname{Re}[U(t)]$ 为:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}[C(\omega) e^{i\omega t}] = \rho(\omega) \cos[\omega t + \gamma(\omega)] \\ &= \frac{A}{P(\omega)} \cos[\omega t + \alpha - \theta(\omega)], \end{aligned} \tag{14.114}$$

这里, $C(\omega)$ 被称为与线性算子 $\mathbf{L}$ 相关的传递函数 (transfer function)。

振幅与频率的关系 方程 (14.114) 显示, 输出 $u(t)$ 的频率与输入信号相同。它还表明, $u(t)$ 的幅度依赖于频率, 使得可以通过调整频率来使得 $P(\omega)$ 最小, 从而获得较大的输出幅度。这就是交流电路中的共振现象。

例 14.7 我们将上述分析应用于例子 14.5, 并且为明确起见, 考虑欠阻尼情况。在该情况下, 满足 $4b > a^2$, 并且定义 $\omega_0 := \sqrt{b}$ 为系统的固有频率。特征多项式为:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

因此, 我们有:

$$p(i\omega) = -\omega^2 + i\omega a + b = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega a,$$

以及

$$P(\omega) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}, \quad \theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega a}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

输出信号的幅度 (有时称为增益函数) 为:

$$\rho(\omega) = \frac{A}{P(\omega)} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}}.$$

分母的最小值发生在 $\omega = \omega_0$, 即当驱动频率等于固有频率时。此时, 我们得到:

$$\rho(\omega) = \frac{A}{\omega_0 a},$$

这表明当阻尼系数 a 很小时, 输出信号的幅度会很大。我们只考虑了特解 $u(t)$, 因为通解:

$$y(t) = K e^{-at/2} \cos(\omega_1 t + \beta) + u(t),$$

最终会简化为 $u(t)$ (其中 K 和 β 是常数)。右边的第一项是瞬态项, 它会衰减至零。这个衰减的速率由时间常数 $2/a$ 决定, 这个时间间隔表示瞬态项的幅度下降到其初始值的 $1/e$ 时所需的时间。

正弦信号的重要性在于任何周期信号都可以展开为傅里叶级数:

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t},$$

其中 ω 是基频。由于 $\mathbf{L}$ 是线性的, 解可以表示为:

$$u(t) = \text{Re}[U(t)],$$

其中

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega) e^{in\omega t}.$$

将该表达式代入 $\mathbf{L}[U] = R(t)$ 中, 我们得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega) p(in\omega) e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}.$$

由于 $e^{in\omega t}$ 是正交归一的，我们得到：

$$C_n(\omega) = \frac{b_n}{p(in\omega)}.$$

因此，解为：

$$u(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n e^{in\omega t}}{p(in\omega)} \right].$$

由此， $u(t)$ 也是周期性的，并且与输入信号 $r(t)$ 具有相同的基频。

15 拉普拉斯方程：笛卡尔坐标系

在之前的章节中，我们讨论了分离变量法这一技术，它是解决初等物理和工程课程中最常遇到的偏微分方程（PDE）的方法之一。其中，有一个偏微分方程特别值得关注，那就是拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (15.1)$$

除了在实际应用中的重要性，拉普拉斯方程之所以重要，还在于它的解自然引出了数学物理中一些最著名的函数。事实上，在不同坐标系中分离这个方程时，我们不仅可以得到像正弦和余弦这样简单的函数，还能得到更高级的“特解函数”，如勒让德多项式和贝塞尔函数。这些函数的核心是**拉普拉斯方程的线性特性**，它允许我们通过叠加（无穷多个）解来得到新的解。这自然地引导我们得到了拉普拉斯方程的无穷级数解。

在典型的情况下， Φ 在某些边界面上给定，我们需要求出在体积内所有点的值。当边界面形状任意时，解只能通过数值方法找到；但是，当边界面是坐标系的主面时，我们通常可以通过在适当坐标系中分离拉普拉斯方程来求解该问题。

15.1 解的唯一性

在本章及下一章中，我们将看到许多拉普拉斯方程在不同坐标系下的解。这些解将通过无穷级数的形式给出。因此，我们知道拉普拉斯方程的解确实存在。本节的目的是证明，满足所有边界条件的解是唯一的。换句话说，无论我们如何求解，只要解满足边界条件，它就是拉普拉斯方程的解。事实上，我们可以更一般地证明泊松方程 $\nabla^2\Phi = \rho$ 解的唯一性。

考虑体积 V ，其被一些表面所包围。图 105 显示了两个这样的体积。假设两个函数 Φ_1 和 Φ_2 在体积的每个点上都满足泊松方程，并且它们都满足与表面相关的某些条件（我们稍后将讨论）。令 $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ ，并注意到 Φ 满足拉普拉斯方程，因为：

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2\Phi_1 - \nabla^2\Phi_2 = \rho - \rho = 0. \quad (15.2)$$

对于任意函数 f ，我们有：

$$\nabla \cdot (f\nabla f) = \nabla f \cdot \nabla f + f\nabla^2 f = |\nabla f|^2 + f\nabla^2 f.$$

对于 Φ ，由于它满足拉普拉斯方程，我们得到：

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \underbrace{\Phi\nabla^2\Phi}_{=0} = |\nabla\Phi|^2.$$

对上式两边在体积 V 上积分，并使用散度定理对左侧进行处理，得到：

$$\begin{aligned} \iint_S (\Phi\nabla\Phi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da &= \iint_S (\Phi_1 - \Phi_2) (\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla\Phi_1 - \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla\Phi_2) da \\ &= \iiint_V |\nabla\Phi|^2 dV, \end{aligned}$$

其中 S 为边界面， $\hat{\mathbf{e}}_n$ 是法向单位向量。

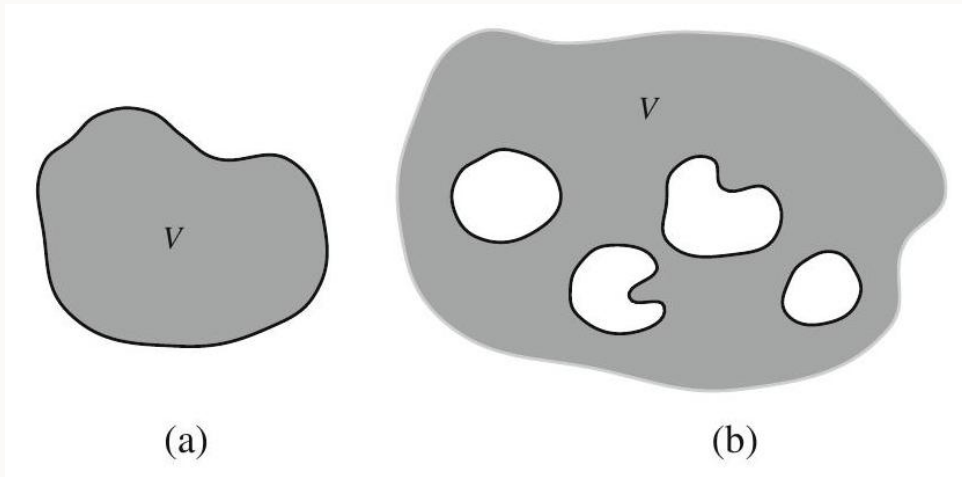


图 105: 包围体积的表面。(a) 体积在包围表面“内部”；(b) 体积在包围表面“外部”。

现在假设：

- 狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件： Φ_1 和 Φ_2 在每个边界面点的值相同，即 $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$ 在 S 上；

- 诺伊曼 (Neumann) 边界条件: 所谓的法向导数 $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla \Phi_1$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla \Phi_2$ 在每个边界面点的值相同, 即 $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla \Phi_1 - \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \nabla \Phi_2 = 0$ 在 S 上。

在这两种情况下, 方程 (15.3) 第一行的积分结果均为零。由于第二行的被积函数非负, 因此被积函数必须为零。进一步得到:

$$|\nabla \Phi|^2 = 0 \Rightarrow \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \text{constant}.$$

由于在边界面上 $\Phi = 0$, 因此常数必须为零, 即 $\Phi_1 = \Phi_2$ 对于体积 V 中的所有点成立。我们由此得出:

定理 15.1 令 V 为由 (可能是不连通的) 表面 S 所包围的体积。那么, 存在唯一的函数在 V 的每个点上满足拉普拉斯方程 (或泊松方程), 并且满足 S 上的狄利克雷或诺伊曼边界条件。

15.2 笛卡尔坐标系中的拉普拉斯方程

通过将常数 C 设为零，可以从方程(12.27)中得到笛卡尔坐标系下的拉普拉斯方程分离形式。得到以下三个方程：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha_1 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - \alpha_2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + (\alpha_1 + \alpha_2) Z = 0, \quad (15.3)$$

其中 α 是任意常数（包括零和复数）。每个 α 的具体值取决于边界条件（BCs）。我们考虑与笛卡尔坐标系平行的边界面。

解决拉普拉斯方程的最有效方法是深入探讨若干具体例子的解法。接下来我们将给出这些例子的解，注意例子中的每一步操作，考虑在不同情况下（不同的边界条件等）如何调整每一步。

例 15.1 考虑两个半无限导电板，它们起始于 y - z 平面，并且与 x - z 平面平行，板子接地（即电势 Φ 为零），并且它们之间的距离为 b ，见图 106。

两个导电板沿正 x 方向及正负 z 方向无限延伸。一个宽度为 b 的条状导电板（沿 z 轴方向也无限延伸）位于两个板之间，并与它们之间保持一个无穷小的间隙，因此该条可以保持在一个不同的电势 $\Phi = V$ 上。图 106(b) 显示了问题几何的横截面。我们要求解被导体包围区域中的电势。

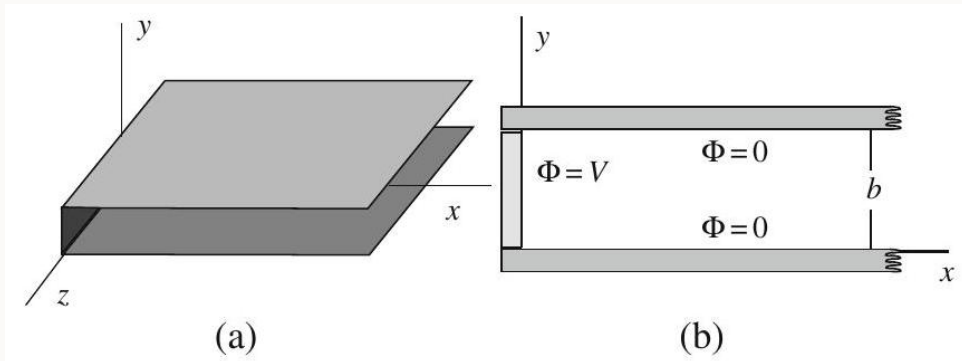


图 106: (a) 半无限导电板，(b) 两个（接地）板和保持电势为 V 的条带的横截面。

电势与 z 无关：因为当一个观察者沿 z 轴移动时，保持其他两个坐标不变，他将不会测量到物理环境的变化，因为探测器的物理环境保持不变。所以， $Z(z)$ 是常数，我们将其吸收到 $X(x)$ 或 $Y(y)$ 中。此外，将 $Z = \text{常数}$ 代入方程(15.3)的第三个方程，可以得到 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ 。

因此，问题简化为求解满足方程(15.3)中关于 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的微分方程。首先我们考虑 Y 方程。如果 $\alpha_2 = 0$ ，则解的形式为：

$$Y(y) = Ay + B$$

对于 $\alpha_2 \neq 0$ 的情况，它是一个常系数的二阶常微分方程，其通解可以写为

$$Y(y) = Ae^{\sqrt{\alpha_2}y} + Be^{-\sqrt{\alpha_2}y}. \quad (15.4)$$

在 $y = 0$ 和 $y = b$ 处, Φ 为零意味着

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= X(x)Y(0) = 0 \quad \text{对所有 } x \Rightarrow Y(0) = 0, \\ \Phi(x, b) &= X(x)Y(b) = 0 \quad \text{对所有 } x \Rightarrow Y(b) = 0.\end{aligned}$$

因此, 对于 $\alpha_2 = 0$ 的情况, 意味着

$$\begin{aligned}Y(0) &= A \times 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0, \\ Y(b) &= Ab + B = Ab + 0 = 0 \Rightarrow A = 0.\end{aligned}$$

因此, 如果 $\alpha_2 = 0$, 我们得到 $Y(y) = 0$ 和 $\Phi(x, y) = X(x)Y(y) = 0$, 这就是平庸解。由此可知, 如果我们关心非平庸解, 我们最好假设 $\alpha_2 \neq 0$ 。然后, 方程(15.4)给出:

$$Y(0) = A + B = 0 \quad \text{和} \quad Y(b) = Ae^{\sqrt{\alpha_2}b} + Be^{-\sqrt{\alpha_2}b} = 0.$$

将第二个方程乘以 $e^{\sqrt{\alpha_2}b}$ 并使用 $B = -A$, 我们得到:

$$A[e^{2\sqrt{\alpha_2}b} - 1] = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{或} \quad e^{2\sqrt{\alpha_2}b} = 1.$$

边界条件迫使 α_2 为虚数。第一个选择 ($A = 0$) 和 $A = -B$ 再次得到平庸解。因此, 我们必须假设第二个选择成立。然而, 即使选择第二种情况, 如果我们仅限于实数, $e^{2\sqrt{\alpha_2}b} = 1$ 的唯一解是 $\alpha_2 = 0$, 这是矛盾的, 因为我们正处理的是 $\alpha_2 \neq 0$ 的情况。由此可得, $\sqrt{\alpha_2}$ 必须是复数。实际上, 回忆一下对于任意整数 n , 有 $e^{2in\pi} = 1$, 我们立即得到:

$$2\sqrt{\alpha_2}b = 2in\pi \Rightarrow \sqrt{\alpha_2}b = in\pi \Rightarrow \alpha_2 = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

注意, $n = 0$ 被排除, 因为这个选择会使得 $\alpha_2 = 0$ 。

我们现在转向 X 方程。由于 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, 我们得到

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

和

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = Ce^{n\pi x/b} + De^{-n\pi x/b}$$

为了使电势具有物理意义, 电势必须在 $x \rightarrow +\infty$ 时保持有限。从最后一个方程可以看出, 要么 n 为负且 $D = 0$, 要么 n 为正且 $C = 0$ 。容易验证无论选择哪种情况, 最终的结果是相同的。选择正值的 n 并令 $C = 0$, 电势可以写为

$$\Phi_n(x, y) = AD e^{-n\pi x/b} [e^{in\pi y/b} - e^{-in\pi y/b}] = A_n e^{-n\pi x/b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

其中我们使用了 $A = -B$ 并引入了新常数 A_n 。我们还给电势加上了下标, 因为对于每个 n , 我们得到不同的 Φ 函数。所有这些函数都是拉普拉斯方程的解, 因此它们的和也是解。实际上, 只有这个和才足够一般, 能够给出最终解。我们因此写出

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (15.5)$$

这是一个关于 y 的傅里叶级数，且系数依赖于 x 。如果可以确定常数 A_n ，那么电势就能完全确定。这是最后一部分未使用信息的应用：在 $x = 0$ 时电势为 V 。将此信息代入方程(15.5)，得到

$$V = \Phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

从中可以通过傅里叶级数确定 A_n ，容易得到 $A_n = \frac{2V[1-(-1)^n]}{n\pi}$ ，或者

$$A_n = \begin{cases} \frac{4V}{n\pi} & \text{如果 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{如果 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

令 $n = 2k + 1$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots$ ，感兴趣区域的电势变为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)\pi x/b}}{2k+1} \sin\left[\frac{(2k+1)\pi y}{b}\right] \\ &= \frac{4V}{\pi} \left[e^{-\pi x/b} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{e^{-3\pi x/b}}{3} \sin \frac{3\pi y}{b} + \frac{e^{-5\pi x/b}}{5} \sin \frac{5\pi y}{b} + \dots \right] \end{aligned} \quad (25.6)$$

由于指数因子的存在，该级数收敛非常迅速，对于较大的 x ，电势会迅速衰减为零。

示例 15.1 展示了通过分离变量法在笛卡尔坐标系中求解拉普拉斯方程的一般特征。这一特征同样适用于其他坐标系。分离变量法导致了一些常微分方程，这些方程涉及由某些边界条件确定的参数（在上述案例中为 α ）。所有符合所用边界条件的参数值——在所有我们感兴趣的情况下，这些参数值将是整数——都是允许的，必须考虑在内，也就是说，必须形成一个关于这些参数的无限求和（其系数尚未确定），作为拉普拉斯方程的最一般解。通过应用其余的边界条件，可以求出未定系数，从而得到适用于问题几何形状的唯一解。如果几何形状在某个方向上延伸至无穷远，则该无穷远方向应视为边界条件。考虑到问题的任何对称性是极其有用的，因为这些对称性会显著简化解的过程。在示例 15.1 中， z 方向的对称性为我们节省了解决一个（三个）完整常微分方程的时间。

例 15.2 稳态热传导问题也遵循拉普拉斯方程。假设我们考虑一个在 z 方向上无限延伸的矩形介质，被两对宽度为 a 和 b 的平行板所包围，如图 107 所示。宽度为 a 的板的温度为零（假设与 x - z 平面平行）。另外两块板的温度分别为 T_1 和 T_2 。我们要找出平衡达到后区域内所有点的温度。

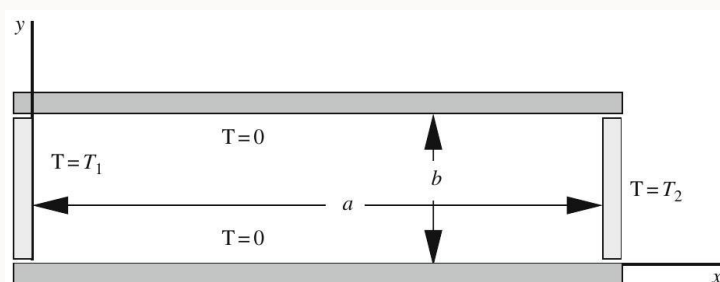


图 107: 两对平行板的截面，这些板维持在不同的温度下。

如同在例子 15.1 中一样，我们可以忽略 z 方向的依赖，写作 $T(x, y) = X(x)Y(y)$ ，其中 X 和 Y 满足方程 (15.3)，并且 $\alpha_1 = -\alpha_2$ 。与例子 15.1 中的原因完全相同， α_2 不能为零，且 Y 只能是以下形式：

$$Y(y) = A_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

其中 A_n 下标提醒我们，不同的常数可以乘以不同的正弦函数。然而， X 的解会有所不同。我们仍然有

$$X(x) = C_n e^{n\pi x/b} + D_n e^{-n\pi x/b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

但是这次 C_n 和 D_n 都不为零。将这两个函数相乘，并重新定义常数，我们可以写成

$$T_n(x, y) = \left(A_n e^{n\pi x/b} + B_n e^{-n\pi x/b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

最一般的无限级数解为

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi x/b} + B_n e^{-n\pi x/b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (15.6)$$

到目前为止，我们只使用了四个边界条件中的两个。剩下的两个将决定未知数 A_n 和 B_n 。代入这些边界条件得到以下两个方程：

$$\begin{aligned} T_1 = T(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n + B_n)}_{:=E_n} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ T_2 = T(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n e^{n\pi a/b} + B_n e^{-n\pi a/b})}_{:=F_n} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

其中，我们已经重新定义了乘以正弦函数的常数。与例子 15.1 和中的情况一样，我们有

$$E_n = \frac{2T_1}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad F_n = \frac{2T_2}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

这些关系表明，只有无限级数中的奇数项才是相关的，它们由以下式子给出：

$$\begin{aligned} E_{2k+1} &:= A_{2k+1} + B_{2k+1} = \frac{4T_1}{\pi(2k+1)} \\ F_{2k+1} &:= A_{2k+1} e^{(2k+1)\pi a/b} + B_{2k+1} e^{-(2k+1)\pi a/b} = \frac{4T_2}{\pi(2k+1)}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

这两个方程含有两个未知数，可以解得：

$$\begin{aligned} A_{2k+1} &= \frac{2(T_2 - T_1 e^{-(2k+1)\pi a/b})}{\pi(2k+1) \sinh[(2k+1)\pi a/b]}, \\ B_{2k+1} &= \frac{2(T_1 e^{(2k+1)\pi a/b} - T_2)}{\pi(2k+1) \sinh[(2k+1)\pi a/b]}. \end{aligned}$$

代入方程 (15.6)，并将 n 替换为 $2k+1$ ，整理项得到：

$$T(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_1 \sinh \left[\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b} \right] + T_2 \sinh \left[\frac{(2k+1)\pi x}{b} \right]}{(2k+1) \sinh \left[\frac{(2k+1)\pi a}{b} \right]} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

请验证，当 $T_2 = 0$ 且 $a \rightarrow \infty$ 时，我们可以恢复例子 15.1 的结果， V 被 T_1 替代。

到目前为止处理的例子可能给人一种印象, 认为 α_1 或 α_2 永远不为零。这与对 Φ (或 T) 施加的特定边界条件有关。在这两个例子中, Y 在 $y = 0$ 和 $y = b$ 处都为零。这样的边界条件排除了 $\alpha_2 = 0$, 因为相应的 Y , 即 $Y = Ay + B$, 除非 $Y \equiv 0$ 恒成立, 否则无法满足这些条件。

例 15.3 为了看到 $\alpha_1 = -\alpha_2 = 0$ 的项如何参与计算, 我们修改例子 15.2 中的温度设置, 使得底部板和左侧板的温度为 $T = 0$, 而顶部板的温度为 T_1 , 右侧板的温度为 T_2 。

我们写出从分离变量法得到的拉普拉斯方程最一般解, 包含 $\alpha_1 = 0 = -\alpha_2$ 的项。由于非零的 α_1 和 α_2 具有相反的符号, 其中一个将为正, 具有实数平方根, 另一个则为纯虚根。假设 α_1 为正。那么, X 将是指数类型的, Y 将是复指数型或三角型的。由此, 拉普拉斯方程的最一般解可以写成

$$T(x, y) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0) + \sum_{\alpha} \left(A_{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}x} + B_{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}x} \right) [C_{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}y) + D_{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}y)] \quad (15.8)$$

我们用 α 来表示 $\alpha = \alpha_1 = -\alpha_2$ 。首先施加 y 的边界条件是方便的。所以, 由于 $T(x, 0) = 0$, 我们有

$$0 = (A_0x + B_0)D_0 + \sum_{\alpha} \left(A_{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}x} + B_{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}x} \right) D_{\alpha}$$

这个式子必须对任意的 x 成立。只有当 $D_0 = D_{\alpha} = 0$ 时才能成立。因此, 我们将乘法常数 C_0 和 C_{α} 吸收进 A 和 B 中, 得到温度的新表达式:

$$T(x, y) = (A_0x + B_0)y + \sum_{\alpha} \left(A_{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}x} + B_{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}x} \right) \sin(\sqrt{\alpha}y)$$

另一个 y -边界条件给出:

$$T_1 = (A_0x + B_0)b + \sum_{\alpha} \left(A_{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}x} + B_{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}x} \right) \sin(\sqrt{\alpha}b).$$

$\alpha_1 = 0$ 项在这里的重要性体现在 B_0 和 T_1 之间的关系。为了使其对任意 x 成立, 我们需要满足:

$$A_0 = 0, \quad B_0b = T_1 \Rightarrow B_0 = \frac{T_1}{b}, \quad \sin(\sqrt{\alpha}b) = 0 \Rightarrow \alpha = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2.$$

温度函数简化为:

$$T(x, y) = \frac{T_1}{b}y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi x/b} + B_n e^{-n\pi x/b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

现在我们施加另外两个边界条件。这将给出以下两个方程:

$$0 = T(0, y) = \frac{T_1}{b}y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$T_2 = T(a, y) = \frac{T_1}{b}y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi a/b} + B_n e^{-n\pi a/b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

将这两个方程两边乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ 并从 0 积分到 b , 得到关于 A_m 和 B_m 的以下两个方程:

$$A_m + B_m = -\frac{2T_1}{b^2} \int_0^b y \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \frac{2T_1}{m\pi} (-1)^m,$$

$$\begin{aligned}
A_m e^{m\pi a/b} + B_m e^{-m\pi a/b} &= \frac{2}{b} \int_0^b \left(T_2 - \frac{2T_1}{b} y \right) \sin \frac{m\pi y}{b} dy \\
&= \frac{2}{m\pi} [T_2 + (-1)^m (T_1 - T_2)].
\end{aligned}$$

这两个方程可以求解得到剩余的未知系数 A_m 和 B_m 。

有几点需要说明。前面的例子清楚地展示了 $\alpha_1 = 0$ 项的重要性：如果我们没有在 T 的展开式中包含这一项，就无法得到正确的答案。大多数关于拉普拉斯方程的处理都忽略了这一点。因此，有必要强调这一点。

始终从拉普拉斯方程的最一般解开始，包括对应于分离变量常数为零的情况的项，如方程 (15.8) 所给出。然后应用边界条件，记住应用边界条件时可能有一个优先顺序。

在例子 15.3 中，首先应用 y 方向的边界条件是首选的方式。

第二个要点与 X 和 Y 的函数形式选择有关。在例子 15.3 中，我们选择了 X 为指数型， Y 为三角函数型。我们完全可以选择 Y 为指数型， X 为三角函数型。虽然级数的表现形式会有所不同，但在区域内的任何一点的 T 值对于两种级数都是相同的。这是由于拉普拉斯方程解的唯一性。

至今我们讨论的例子都是“二维”的。现在我们考虑一个三维问题。尽管这个特定的问题可以通过依赖我们的直觉（例如在例子 15.1 中的做法）更快速地解决，但我们将从最一般的解开始。

例 15.4 假设一个半无限的矩形导电管的四个侧面宽度分别为 a 和 b ，并且这些侧面是接地的，闭合的底面保持在电势 V 下，如图 108 所示。这个管道的横截面如图 107 所示，其中假设该管道从 $z = 0$ 开始，并在 z -轴的正方向上延伸到无穷远。我们感兴趣的是求解该管道内的电势。

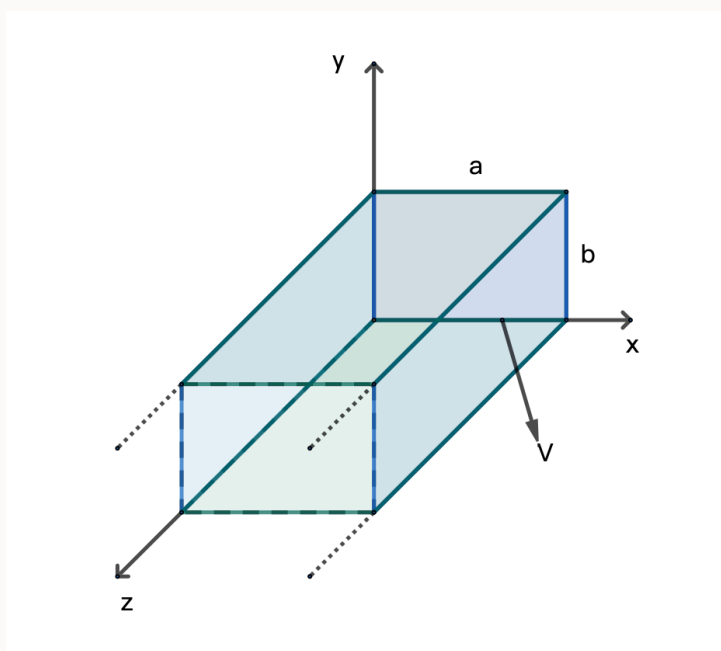


图 108: 半无限的矩形导电管示意图。

我们从方程 (15.3) 开始，该方程适用于在笛卡尔坐标系中拉普拉斯方程的所有解。我们需

要考虑四种不同的情况:

1. $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$: 在这种情况下, $X(x)$ 具有通用形式 $Ax + B$, 这也是 Y 和 Z 的通用形式 (其中 y 或 z 替代 x)。我们将这些解记作 X_0 、 Y_0 和 Z_0 。
2. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$: 在这种情况下, $X(x)$ 具有通用形式 $Ax + B$ 。但 Y 和 Z 要么是指数型的, 要么是三角函数型的。我们将这些解记作 X_0 、 Y_{α_2} 和 Z_{α_2} 。
3. $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$: 在这种情况下, $Y(y)$ 具有通用形式 $Ay + B$ 。但 X 和 Z 要么是指数型的, 要么是三角函数型的。我们将这些解记作 Y_0 、 X_{α_1} 和 Z_{α_1} 。
4. $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$: 在这种情况下, X 、 Y 和 Z 要么是指数型的, 要么是三角函数型的。我们将这些解记作 X_{α_1} 、 Y_{α_2} 和 $Z_{\alpha_1+\alpha_2}$ 。

对于电势的最一般解, 涵盖所有 α_1 和 α_2 的值, 写为:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & X_0(x)Y_0(y)Z_0(z) + X_0(x) \sum_{\alpha_2} Y_{\alpha_2}(y)Z_{\alpha_2}(z) \\ & + Y_0(y) \sum_{\alpha_1} X_{\alpha_1}(x)Z_{\alpha_1}(z) + \sum_{\alpha_1 \neq 0} \sum_{\alpha_2 \neq 0} X_{\alpha_1}(x)Y_{\alpha_2}(y)Z_{\alpha_1+\alpha_2}(z). \end{aligned} \quad (15.9)$$

我们现在应用边界条件。由于对于任意的 y 和 z , 我们有 $\Phi(0, y, z) = \Phi(a, y, z) = 0$, 并且方程 (15.9) 中的每一项相互独立, 我们得出结论: $X_0(0) = 0 = X_0(a)$ 及 $X_0(0) = 0 = X_0(a)$ 。因此, A 和 B 对于 X_0 和 X_0 都为零, 所以 $X_0(x) = 0 = X_0(x)$ 。

同样地, $Y_0(y) = 0$, 因此 Φ 简化为方程 (15.9) 的最后一项 (双重求和项)。此外, 由于 X_{α_1} 和 Y_{α_2} 在它们各自的范围的两个端点处为零, 我们期望它们是周期性的, 即三角函数型。因此, 最一般的解现在为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \sum_{\alpha_1, \alpha_2} [A_{\alpha_1} \cos(\sqrt{\alpha_1}x) + B_{\alpha_1} \sin(\sqrt{\alpha_1}x)] \\ & \times [C_{\alpha_2} \cos(\sqrt{\alpha_2}y) + D_{\alpha_2} \sin(\sqrt{\alpha_2}y)] Z_{\alpha_1+\alpha_2}(z). \end{aligned} \quad (15.10)$$

如果该解在 $x = 0$ 时对于任意的 y 和 z 为零, 则必须有 $A_{\alpha_1} = 0$; 如果 $\Phi(a, y, z) = 0$ 对于所有的 y 和 z , 则求和式中乘积项的所有系数必须为零。这些系数 (在将 A_{α_1} 设为零之后) 是以 $\sin(\sqrt{\alpha_1}a)$ 的形式出现的。因此, 我们得到

$$\sqrt{\alpha_1}a = m\pi \Rightarrow \alpha_1 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

就像在之前的例子中一样, 这里我们排除了 m 的负值。一个完全类似的推理得到 $C_{\alpha_2} = 0$, 并且

$$\sqrt{\alpha_2}b = n\pi \Rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

z 的函数依赖关系是指数型的, 由于在 $z \rightarrow \infty$ 处势能不发散, 因此将不出现正指数项。将所有的乘法常数吸收进一个 (双重指标的) 常数中, 我们现在可以写出

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} z}. \quad (15.11)$$

未知常数 A_{mn} 通过使用最后的边界条件来确定:

$$V = \Phi(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (15.12)$$

这是一个双重傅里叶级数。双重傅里叶级数(15.12)的系数可以通过将两边分别乘以 $\sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$, 并对结果分别在 x 和 y 方向上从 0 到 a 和从 0 到 b 进行积分来计算:

$$A_{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y, 0) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy$$

我们现在可以得到:

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \frac{4V}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4V}{ab} \left(\frac{a}{\pi j} [1 - (-1)^j] \right) \left(\frac{b}{\pi k} [1 - (-1)^k] \right) \end{aligned}$$

或者,

$$A_{jk} = \frac{4V}{\pi^2} \frac{1 - (-1)^j}{j} \frac{1 - (-1)^k}{k}$$

显然, 只有双重求和中的奇数项会起作用。因此, 最终的结果为区域内的电势 $\Phi(x, y, z)$ 为:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{(2m+1)\pi x}{a} \right)}{2m+1} \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)\pi y}{b} \right)}{2n+1} e^{-\pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} z}$$

由于其构造方式, 这个函数满足拉普拉斯方程以及所有的边界条件。因此, 根据唯一性定理, 它必须表示该区域的唯一电势。

16 拉普拉斯方程：球坐标系

在球坐标系中分离变量处理拉普拉斯方程，可以通过将方程 (12.47) 中的 $f(r) = 0$ 代入实现。这将得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\alpha}{r^2} R &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + \beta S &= 0,\end{aligned}\tag{16.1}$$

其中 α 和 β 是分离变量引入的分离常数。

我们考虑 S 是常数函数的情形²⁰。对于此类情形，式 (16.1) 中第三个方程要求 $\beta = 0$ ，因为 S 是非零常数。因此，自变量数目减少为两个，且由于具有方位对称性，可以设

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

此时，剩下的两个常微分方程简化为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\alpha}{r^2} R &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha \Theta &= 0,\end{aligned}\tag{16.2}$$

其中， α 是需要通过边界条件确定的分离常数。

我们首先讨论 (16.2) 中的第二个方程，求解出该方程后再回到第一个方程。由于分母中出现了 $\sin \theta d\theta$ （即 $\cos \theta$ 的微分），这提示我们可以将自变量从 θ 改为 $u := \cos \theta$ 。对于任意函数 $f(\theta)$ ，利用链式法则，有

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{du} = \frac{df}{d\theta} \frac{1}{du/d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{df}{d\theta}, \quad \text{即} \quad \frac{df}{d\theta} = -\sin \theta \frac{df}{du}.\tag{16.3}$$

引入新函数 $P(u)$ ，定义为

$$P(u) := \Theta(\theta).$$

利用链式法则，将式 (16.2) 第二个方程中的 θ 导数转为 u 导数，并使用 $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ ，得到新的微分方程：

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[(1 - u^2) \frac{dP}{du} \right] + \alpha P = 0.\tag{16.4}$$

因为方括号内仅含 u 的函数，根据式 (16.3)，可以将 θ 导数转为 u 导数，整理后得到

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{dP}{du} \right] + \alpha P = 0,\tag{16.5}$$

或者展开为

$$(1 - u^2) \frac{d^2 P}{du^2} - 2u \frac{dP}{du} + \alpha P = 0,\tag{16.6}$$

²⁰这对应于具有方位对称性的情形，即问题中的势函数 Φ 与方位角 φ 无关。

或者写成

$$\frac{d^2 P}{du^2} - \frac{2u}{1-u^2} \frac{dP}{du} + \frac{\alpha}{1-u^2} P = 0. \quad (16.7)$$

式 (16.5)、式 (16.6) 或式 (16.7) 被称为勒让德方程 (Legendre differential equation)。接下来，我们将使用所谓的弗罗贝尼乌斯方法 (Frobenius) 方法 (或称待定系数法) 来求解该方程。

16.1 弗罗贝尼乌斯方法

弗罗贝尼乌斯方法的基本假设是, 微分方程的解可以表示为幂级数。这并非一种严格限制的假设, 因为物理应用中遇到的几乎所有函数, 只要在收敛区间内, 我们感兴趣的函数值都可用幂级数表示。该收敛区间可能非常小, 也可能覆盖整个实数轴。

一个二阶齐次线性微分方程通常表示为:

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = 0 \quad (16.8)$$

在物理中常见的情况 (尤其本课程涉及的应用) 中, 函数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 一般都是多项式。

使用弗罗贝尼乌斯方法的第一步, 是假设解 y 为无限幂级数。通常选择 $x = 0$ 为级数展开点。如果满足 $p_2(0) \neq 0$, 则只需要考虑 x 的非负整数幂即可。然而若 $p_2(0) = 0$, 微分方程在 $x = 0$ 处不再具备典型的“二阶”性质, 因此我们寻求的解可能在该点未必存在。此时, 有两种处理方法:

1. 选择另一个展开点 $x_0 \neq 0$, 使得 $p_2(x_0) \neq 0$;
2. 允许在 y 的级数展开中包含 x 的负整数幂。

实际中很少采用第一种选择。更为经济且普遍的方法是采用第二种选择, 将解写为以下形式:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + \cdots \quad (16.9)$$

其中 r 为待确定的实数 (不必为正整数)。通常设定 $a_0 = 1$, 因为任何解的常数倍仍是该微分方程的解。如果 $a_0 \neq 1$, 我们仅需将整个级数乘以 $1/a_0$ 即可。由于幂级数在其收敛半径内是一致收敛的, 因此可逐项微分, 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} = r a_0 x^{r-1} + (r+1) a_1 x^r + \cdots \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \\ &= r(r-1) a_0 x^{r-2} + r(r+1) a_1 x^{r-1} + (r+2)(r+1) a_2 x^r + \cdots \end{aligned} \quad (16.10)$$

我们现在将式 (16.9) 和 (16.10) 代入微分方程 (16.8), 将多项式展开乘入级数中, 收集所有不同幂次的 x 项, 并令每一项的系数为零。由此可得到一组代数方程, 这些方程决定了 r 以及各个 a_n 的取值。其中, 来自最低次幂 x 的方程仅涉及 r , 称为判别方程 (indicial equation)。该方程通常是关于 r 的一个二次方程, 可以求出 r 的两个可能值。每个值一般对应一个独立解。其余来自较高次幂的方程给出递推关系, 即每个 a_n 表达为 a_{n-1} 和 a_{n-2} 的函数。通过递推公式, 可以将所有 a_n 表达为仅包含两个常数的形式, 而这两个常数可以由边界条件决定。

我们将上述方法总结如下:

定理 16.1 为求解微分方程

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = 0, \quad (16.11)$$

设解为形式

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (16.12)$$

并根据以下情况处理：

- 若 $p_2(0) \neq 0$ ，则取 $r = 0$ ，将 y 及其导数（见 (16.10)）代入微分方程中，展开乘积，整理各阶 x 的幂次，并令其系数为零；
- 若 $p_2(0) = 0$ ，解判别方程以求得 r ；再将其他幂次的系数设为零，从而得到递推关系，用以将 a_n 表达为 a_{n-1} 和 a_{n-2} 的函数。

根据上述递推公式以及得到的 r 的值，可以将所有 a_n 表达为仅含两个常数的形式，而这两个常数可由边界条件确定。

16.2 勒让德多项式

我们现在将弗罗贝尼乌斯方法应用于勒让德微分方程，其中自变量为 u ，对应的系数函数为：

$$p_2(u) = 1 - u^2, \quad p_1(u) = -2u, \quad p_0(u) = \alpha.$$

由于 $p_2(0) \neq 0$ ，我们无需在级数前引入额外的幂次 r 。因此，可以设解为

$$P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \cdots \quad (16.13)$$

其一阶和二阶导数为：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{du} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} = a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} u^n, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{du^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 u + 12a_4 u^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} u^n. \end{aligned} \quad (16.15)$$

将上述表达式代入勒让德微分方程中，对每项与其对应多项式相乘，我们有：

$$\begin{aligned} \alpha P(u) &= \alpha a_0 + \alpha a_1 u + \alpha a_2 u^2 + \alpha a_3 u^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n u^n, \\ -2u \frac{dP}{du} &= -2a_1 u - 4a_2 u^2 - 6a_3 u^3 + \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} u^{n+1}, \\ (1-u^2) \frac{d^2 P}{du^2} &= 2a_2 + 6a_3 u + 12a_4 u^2 + 20a_5 u^3 + \cdots \\ &\quad - 2a_2 u^2 - 6a_3 u^3 - 12a_4 u^4 - 20a_5 u^5 + \cdots \\ &= 2a_2 + 6a_3 u + (12a_4 - 2a_2) u^2 + (20a_5 - 6a_3) u^3 + \cdots \end{aligned} \quad (16.16)$$

将这三项级数相加，并注意其和必须为零，有

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha a_0 + \alpha a_1 u + \alpha a_2 u^2 + \alpha a_3 u^3 - 2a_1 u - 4a_2 u^2 - 6a_3 u^3 + 2a_2 + 6a_3 u \\
 &\quad + (12a_4 - 2a_2)u^2 + (20a_5 - 6a_3)u^3 + \cdots \\
 &= (\alpha a_0 + 2a_2) + [(\alpha - 2)a_1 + 6a_3]u \\
 &\quad + [(\alpha - 6)a_2 + 12a_4]u^2 + [(\alpha - 12)a_3 + 20a_5]u^3 + \cdots
 \end{aligned} \tag{16.17}$$

注意各阶系数的表达式中显现出某种模式。事实上， u^n 的系数可以写为

$$[\alpha - n(n+1)]a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}.$$

将该系数设为零，即可得到递推关系：

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \alpha}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{16.18}$$

该公式可将所有的 a_n 表达为 a_0 和 a_1 的函数。

尽管通过逐项展开级数是一种直接求解各项系数并发现递推关系的可靠方法，但我们也可以通过求和符号的代数操作，在不依赖模式识别的情况下推导出递推公式。下面我们将详细展示这一过程，这也是一个值得注意的关于求和操作的技巧性练习。

一般的处理思路是将所有求和项的 u 的幂次统一，也就是说，使所有求和中 u 的幂次均为 n 。为此，我们将所有求和改写为对 n 的求和，并在必要时通过变换求和指标来实现。举例来说，微分方程中最后一项可以写为：

$$\alpha P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n u^n \tag{16.19}$$

关于一阶导数的项为：

$$-2u \frac{dP}{du} = -2u \sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n u^n \tag{16.20}$$

关于二阶导数的项变为：

$$\begin{aligned}
 (1-u^2) \frac{d^2 P}{du^2} &= (1-u^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^{n-2} \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} u^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^n
 \end{aligned} \tag{16.21}$$

其中第一项的求和通过将 n 替换为 $n+2$ 来实现幂次从 $n-2$ 转为 n 。至此，所有求和式中的 u 的幂次均统一为 n 。

下一步是将“较长的求和项”中足够多的前几项单独写出，从而使所有求和都从相同的 n 开始，以便进行统一合并。在当前的情形中，最短的求和是从 $n=2$ 开始的，因此我们将式 (16.19)、

(16.20) 和 (16.21) 改写为:

$$\begin{aligned}\alpha P(u) &= \alpha a_0 + \alpha a_1 u + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha a_n u^n, \\ -2u \frac{dP}{du} &= -2a_1 u - \sum_{n=2}^{\infty} 2n a_n u^n, \\ (1-u^2) \frac{d^2 P}{du^2} &= 2a_2 + 6a_3 u + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} u^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n u^n\end{aligned}\quad (16.22)$$

将上述各项相加, 并注意左边为零, 有:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha a_0 + 2a_2 + (\alpha a_1 - 2a_1 + 6a_3)u \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{[\alpha a_n - 2n a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]}_{=[\alpha - n(n+1)]a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}} u^n\end{aligned}\quad (16.23)$$

将各次幂的系数逐项设为零, 得到:

$$\alpha a_0 + 2a_2 = 0, \quad (\alpha - 2)a_1 + 6a_3 = 0 \quad (16.24)$$

$$[\alpha - n(n+1)]a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad (16.25)$$

其中前两个为最后一个通式的特殊情形, 而该通式正是前文中所得到的递推关系 (16.18)。

公式 (16.18) 是勒让德微分方程解的核心。它可用于从 a_0 生成所有偶数阶的 a_n , 从 a_1 生成所有奇数阶的 a_n 。我们将推导偶数项 a_n 的通项公式, 并将奇数项的推导留为作业练习。

当 $n = 0$ 时, 公式 (16.18) 给出:

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2}a_0,$$

当 $n = 2$ 时,

$$a_4 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha}{4 \cdot 3} \left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)}{4!} a_0.$$

类似地, 对于 $n = 4$, 我们有:

$$a_6 = \frac{4 \cdot 5 - \alpha}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5)}{6!} a_0.$$

可以轻松验证, 当 $n = 6$ 时, 有:

$$a_8 = \frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5)(\alpha - 6 \cdot 7)}{8!} a_0.$$

由此可以归纳出以下通式:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha - 2 \cdot 3)(\alpha - 4 \cdot 5) \cdots [\alpha - (2n-2)(2n-1)]}{(2n)!} a_0 \quad (16.26)$$

同理, 奇数项也可以递推得到, 其结果为:

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 2)(\alpha - 3 \cdot 4)(\alpha - 5 \cdot 6) \cdots [\alpha - (2n-1)2n]}{(2n+1)!} a_1 \quad (16.27)$$

将这些系数代入 $P(u)$ 的级数展开式中, 得到:

$$P(u) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2 \cdot 3)(\alpha-4 \cdot 5) \cdots [\alpha-(2n-2)(2n-1)]}{(2n)!} u^{2n} \\ + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha-2)(\alpha-3 \cdot 4)(\alpha-5 \cdot 6) \cdots [\alpha-(2n-1)2n]}{(2n+1)!} u^{2n+1} \quad (16.28)$$

如果式 (16.28) 中的任一级数要具有物理意义, 它必须是收敛的。虽然其中包含 $(-1)^n$, 看似是交错级数, 但实际上并非如此, 因为涉及 α 的因子可能为正也可能为负, 因此不能使用交错级数判别法。我们尝试使用比值检验法。以下以偶数项级数为例进行计算, 奇数项计算方式相同。记第 n 项为 c_n , 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2} u^{2n+2}}{a_{2n} u^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n(2n+1) - \alpha}{(2n+1)(2n+2)} \right| u^2 = u^2 \quad (16.29)$$

因此, 当 $u^2 < 1$ 时, 级数收敛。

回忆 $u = \cos \theta$, 而 $\theta = 0, \pi$ 是具有物理意义的点, 分别对应 $u = \pm 1$ 。因此, 我们希望级数在这些点也收敛。在这种情况下, 单纯的比值检验无法判断收敛性, 我们尝试使用推广的比值检验。

在 $u^2 = 1$ 时, 对于足够大的 n , 有:

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|_{u^2=1} = \left| \frac{2n(2n+1) - \alpha}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{\alpha}{(2n+1)(2n+2)} \right| \\ \approx 1 - \frac{1}{n+1} \approx 1 - \frac{1}{n} \quad (16.30)$$

而推广的比值检验表明该级数在此情况下发散! 这个结论对式 (16.28) 中的偶数项和奇数项级数都成立。

我们可以通过某种方式使级数收敛。回忆, 参数 α 是完全任意的, 特别是我们可以对其加以约束。那么我们是否可以选某个合适的 α 使得级数收敛呢?

我们注意到, 只要级数是无限的, 我们就无法避免再次面对推广比值检验所导致的发散问题。然而, 如果我们选择 α 使得在某一有限阶之后的所有 a_n 系数都为零, 则级数将变为有限和, 此时 $P(u)$ 将退化为一个多项式, 从而不再存在收敛性的问题。因此, 设 $a_0, a_2, \dots, a_{2k}$ 可能为非零, 而其余所有系数均为零。我们所需做的, 仅是选取 α 使得 $a_{2k+2} = 0$ 。由递推关系可知, 此时 $a_{2k+4}, a_{2k+6}, \dots$ 也都将为零。由于

$$a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1) - \alpha}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k},$$

因此我们必须选择

$$\alpha = 2k(2k+1) \quad (16.31)$$

才能保证 $a_{2k+2} = 0$ 成立, 从而使偶数项级数终止。类似地, 对奇数项级数而言, 为使其在 a_{2k+1} 后终止, 需要有

$$\alpha = (2k-1)(2k) \quad (16.32)$$

从而使 $a_{2k+3}, a_{2k+5}, \dots$ 全部为零。

将 α 选为某一特定值以使某一无穷级数终止为有限多项式，仅是该问题的部分解。那么是否有可能选择某个 α ，使得偶数项和奇数项两个级数都在有限阶数后终止？

假设我们已选定 $\alpha = 2k(2k+1)$ ，使得偶数项级数在 a_{2k} 后终止。此时奇数项级数的递推关系可以写为：

$$a_{2n+1} = \frac{(2n-1)2n-2k(2k+1)}{(2n+1)2n} a_{2n-1} \quad (16.33)$$

将分子设为零，我们得到一个关于 n 的二次方程，其解为：

$$n = -k \quad \text{或} \quad n = k + \frac{1}{2} \quad (16.34)$$

然而，这两个解都不是正整数！因此，用于使偶数项级数终止的 α 并不能使奇数项级数也同时终止。为了解决这一矛盾，我们引入另一个自由参数，即 a_1 。若将 a_1 设为零，则整个奇数项级数将完全消除。同理，若选择 $\alpha = (2k-1)(2k)$ 以使奇数项级数终止，则应将 a_0 设为零以避免偶数项。通常， a_0 和 a_1 的取值会依据归一化条件 $P(1) = 1$ 来确定。

我们对上述结果总结如下：

定理 16.2 勒让德微分方程 (16.6) 存在解的条件是 $\alpha = k(k+1)$ ，其中 k 为非负整数。对应的解记为 $P_k(u)$ ，是一个次数为 k 的多项式，称为第 k 阶勒让德多项式 (Legendre polynomial)。当 k 为偶数时， $P_k(u)$ 仅包含 u 的偶次幂；当 k 为奇数时，仅包含 u 的奇次幂。按照惯例，有 $P_k(1) = 1$ 对任意 k 成立。

因此，每一个 k 对应一个不同的解，也对应一个不同的初始系数 a_0 或 a_1 。这也是为什么更合适的记法是将其写作 C_k ，以标记该阶多项式的归一化常数。我们可以使用公式 (16.26) 和 (16.27)，或递推关系 (16.18) 来计算每个勒让德多项式的系数。

例 16.1 我们使用递推关系计算 0 到 4 阶的勒让德多项式。

解： $P_0(u)$ 为零次多项式，因此是常数函数，由 $P_0(1) = 1$ 可知：

$$P_0(u) = 1.$$

$P_1(u)$ 是一次多项式，且不包含偶次幂，因此形式应为 $C_1 u$ 。由 $P_1(1) = 1$ 可知 $C_1 = 1$ ，于是

$$P_1(u) = u.$$

对 $P_2(u)$ ，有 $\alpha = 2 \cdot 3 = 6$ ，由递推关系得：

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2} a_0 = -3C_2 \Rightarrow P_2(u) = C_2 - 3C_2 u^2.$$

由于 $P_2(u)$ 不含一次项，代入 $P_2(1) = 1$ 得 $C_2 = -\frac{1}{2}$ ，从而：

$$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1).$$

对 $P_3(u)$, 有 $\alpha = 3 \cdot 4 = 12$, 递推关系给出:

$$a_3 = \frac{2-\alpha}{6}a_1 = \frac{2-12}{6}C_3 = -\frac{5}{3}C_3 \Rightarrow P_3(u) = C_3u - \frac{5}{3}C_3u^3.$$

由于 $P_3(u)$ 不含常数项与 u^2 项, 代入 $P_3(1) = 1$ 可得 $C_3 = -\frac{3}{2}$, 于是:

$$P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u).$$

最后计算 $P_4(u)$, 对应 $\alpha = 4 \cdot 5 = 20$. 由递推关系得:

$$a_2 = -\frac{20}{2}a_0 = -10C_4, \quad a_4 = \frac{6-20}{12}a_2 = \frac{35}{3}C_4.$$

因此,

$$P_4(u) = C_4 - 10C_4u^2 - \frac{35}{3}C_4u^4.$$

代入 $P_4(1) = 1$ 得 $C_4 = \frac{3}{8}$, 于是:

$$P_4(u) = \frac{1}{8}(35u^4 - 30u^2 + 3).$$

更高阶的勒让德多项式可以以类似方式继续构造。然而, 我们将很快看到还有更简便的方法可用于计算这些多项式。

在 α 被确定为形如 $k(k+1)$ 的情况下, 我们可以计算勒让德多项式的所有系数。我们首先将递推关系 (16.18) 重写为:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-2)(n-1) - k(k+1)}{n(n-1)}a_{n-2} \\ &= -\frac{(k-n+2)(k+n-1)}{n(n-1)}a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, k. \end{aligned} \quad (16.35)$$

对该公式进行一次递推, 我们有:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^2 \frac{(k-n+2)(k+n-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{(k-n+4)(k+n-3)}{(n-2)(n-3)}a_{n-4} \\ &= (-1)^2 \frac{[(k-n+2)(k-n+4)][(k+n-1)(k+n-3)]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}a_{n-4}. \end{aligned} \quad (16.36)$$

通过多次迭代, 可以验证, 对于 $n = 2m$ 或 $2m+1$, 满足以下通式:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^m [(k-n+2)(k-n+4) \cdots (k-n+2m)] \\ &\quad \cdot \frac{(k+n-1)(k+n-3) \cdots (k+n-2m+1)}{n(n-1) \cdots (n-2m+1)}a_{n-2m}. \end{aligned} \quad (16.37)$$

为了进一步推进推导, 我们需要分别处理 n 为偶数和奇数的两种情况。我们在此处理偶数情形, 并将奇数情形留作练习。设 $n = 2m$, 那么 k 必须也是偶数, 记 $k = 2j$. 此时, 由上式 (16.37) 可得:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= (-1)^m \frac{[(2j)(2j-2) \cdots (2j-2m+2)][(2j+2m-1)(2j+2m-3) \cdots (2j+1)]}{2m(2m-1) \cdots 1}a_0 \\ &= (-1)^m \frac{[(2j)!!/(2j-2m)!!][(2j+2m-1)!!/(2j-1)!!]}{(2m)!}a_0 \end{aligned} \quad (16.38)$$

其中使用了双阶乘记号 $!!$ ²¹，并代入恒等式（习题）：

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}, \quad (2l)!! = 2^l l!$$

最终可以得到：

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{(-1)^m j!}{2^j} \cdot \frac{(2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \cdot \frac{1}{(2m)!} a_0 \\ &:= A_j (-1)^m \frac{(2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \cdot \frac{1}{(2m)!} \end{aligned} \quad (16.40)$$

其中 $A_j = a_0 \cdot \left(\frac{j!}{2^j}\right)$ 。可以验证，对于奇数阶有如下表达式：

$$a_{2m+1} = B_j (-1)^m \frac{(2j+2m+2)!}{(j+m+1)!(j-m)!} \cdot \frac{1}{(2m+1)!} \quad (16.41)$$

其中 B_j 是某个常数。因此，偶数阶勒让德多项式可以表示为：

$$P_{2j}(x) = A_j \sum_{m=0}^j (-1)^m \frac{(2j+2m)!}{(j+m)!(j-m)!} \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad (16.42)$$

而奇数阶勒让德多项式则为：

$$P_{2j+1}(x) = B_j \sum_{m=0}^j (-1)^m \frac{(2j+2m+2)!}{(j+m+1)!(j-m)!} \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (16.43)$$

我们现在在两个求和公式中引入新的求和指标 $r = j - m$ ，并分别令偶数阶时 $n = 2j$ ，奇数阶时 $n = 2j + 1$ 。这样，两个表达式都可以统一写成以下形式：

$$P_n(x) = K_n \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r!} \cdot \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!} \quad (16.44)$$

其中， $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数， K_n 是一个待定常数。我们取 $K_n = \frac{1}{2^n}$ ，使得 $P_n(1) = 1$ 成立。由此得到标准形式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r!} \cdot \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!} \quad (16.45)$$

参考超几何函数的定义以及上式，可以验证：

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} {}_2F_1 \left(-n, n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2 \right) \quad (16.46)$$

以及

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} x \cdot {}_2F_1 \left(-n, n + \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x^2 \right) \quad (16.47)$$

²¹

$$n!! := \begin{cases} n \cdot (n-2) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 & n > 0 \text{ 奇} \\ n \cdot (n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2 & n > 0 \text{ 偶} \\ 1 & n = -1, 0 \end{cases} \quad (16.39)$$

16.3 勒让德微分方程的第二个解

回忆, 任一二阶线性微分方程都有两个线性无关的基本解。我们目前已找到勒让德微分方程的一个解, 即勒让德多项式。根据式 (14.25), 一旦已知一个解, 就可以构造出另一个线性无关的解。为此, 我们首先将勒让德微分方程改写为如下形式, 以符合式 (14.25) 的结构:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0 \quad (16.48)$$

这仍然是一个齐次的二阶线性微分方程, 其对应的函数为:

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}.$$

利用 $P_n(x)$ 作为已知解, 我们可以构造出另一组解。记 $Q_n(x)$ 表示与 $P_n(x)$ 线性无关的“伴随解”。根据式 (14.25), 令常数 $C = 0$, 我们有:

$$Q_n(x) = K P_n(x) \int_{\alpha}^x \frac{1}{P_n^2(s)} \exp \left[\int_c^s \frac{2t}{1-t^2} dt \right] ds \quad (16.49)$$

我们来计算指数部分:

$$\int_c^s \frac{2t}{1-t^2} dt = -\ln |1-t^2| \Big|_c^s = -\ln \left| \frac{1-s^2}{1-c^2} \right| = \ln \left| \frac{1-c^2}{1-s^2} \right|$$

从而:

$$\exp \left[\int_c^s \frac{2t}{1-t^2} dt \right] = \left| \frac{1-c^2}{1-s^2} \right| = \frac{|1-c^2|}{1-s^2}$$

因为 s 是勒让德多项式的自变量, 亦即角度的余弦, 因此 $|s| \leq 1$, 故 $1-s^2 \geq 0$ 。于是得到:

$$Q_n(x) = A_n P_n(x) \int_{\alpha}^x \frac{ds}{(1-s^2)P_n^2(s)} \quad (16.50)$$

其中 $A_n := K|1-c^2|$ 是一个任意常数, α 是区间 $[-1, +1]$ 内的任意常数。下标 n 表示该常数可能随阶数而变。这些新的解称为“第二类勒让德函数”(Legendre functions of the second kind)。需要注意的是, 与 $P_n(x)$ 不同, $Q_n(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处行为不良, 因为式 (16.50) 的被积函数分母中含有 $1-s^2$, 在端点趋于零。因此在本书中我们将不使用这些第二解。

例 16.2 求 $Q_0(x)$ 和 $Q_1(x)$: 勒让德微分方程的第二类解对应 $n=0$ 与 $n=1$ 的情形。

解: 由例 16.1 可知 $P_0(x) = 1$ 。因此,

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= A_0 \int_{\alpha}^x \frac{ds}{1-s^2} = \frac{A_0}{2} \int_{\alpha}^x \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right) ds \\ &= A_0 \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right| \right] \end{aligned} \quad (16.51)$$

若取 $A_0 = 1$ 且 $\alpha = 0$, 则得标准形式:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{当 } |x| < 1 \quad (16.52)$$

类似地, 由 $P_1(x) = x$, 我们有:

$$Q_1(x) = A_1 x \int_{\alpha}^x \frac{ds}{(1-s^2)s^2} \quad (16.53)$$

在计算过程中，使用了如下分式展开：

$$\frac{1}{(1-s^2)s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(1-s)} + \frac{1}{2(1+s)},$$

从而使积分变为初等函数。最终形式为：

$$Q_1(x) = Ax + Bx \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \text{当 } |x| < 1, \quad (16.54)$$

其中 A, B, C 为常数。按照惯例，取 $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$ ，则：

$$Q_1(x) = \frac{1}{2}x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1. \quad (16.55)$$

16.4 完整解

在得到了拉普拉斯方程的角向解之后，我们现在来处理径向部分。给定 $\alpha = k(k+1)$ ，我们可以将式 (16.2) 中的第一个方程写成：

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - k(k+1)R = 0 \quad (16.56)$$

由于 $p_2(0) = 0$ ，我们必须考虑形如

$$R(r) = r^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

的解。对该级数求导并代入方程 (16.56) 中，得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+1) - k(k+1)] b_n r^{n+s} = 0$$

因此有：

$$[(n+s)(n+s+1) - k(k+1)] b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

特别地，对 $n = 0$ ，在假设 $b_0 \neq 0$ 的前提下，得到判别方程：

$$s(s+1) - k(k+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = k \quad \text{或} \quad s = -k-1$$

当 $s = k$ 时，代入一般 $n \geq 1$ 的项，得：

$$[(n+k)(n+k+1) - k(k+1)] b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad n(n+2k+1)b_n = 0$$

由于 n 和 $n+2k+1$ 均不为零，故 $b_n = 0$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。因此，对 $s = k$ ，我们得到解：

$$R(r) = A_k r^k,$$

其中 A_k 是任意常数（先前记作 b_0 ）。当 $s = -k-1$ 时，有：

$$[(n-k-1)(n-k) - k(k+1)] b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad n(n-2k-1)b_n = 0$$

这意味着 $n = 2k+1$ 时 b_n 可为非零，其余 $b_n = 0$ 。但此时

$$R(r) = r^{-k-1} b_{2k+1} r^{2k+1} = b_{2k+1} r^k,$$

它只是我们已知解的一个常数倍。因此，假设 $n \neq 2k+1$ ，则 $b_n = 0$ 对所有 $n \geq 1$ 成立，得到另一个解：

$$R(r) = B_k r^{-k-1},$$

其中 B_k 是另一个任意常数。因此，径向微分方程的通解为：

$$R_k(r) := A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16.57)$$

定理 16.3 为了求解拉普拉斯方程在球坐标系中最一般的方位角对称解，我们将每个 k 值对应的径向解与角向解（勒让德多项式）相乘，并对所有可能的 k 进行求和，得到：

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}} \right) P_k(\cos \theta) \quad (16.58)$$

其中我们已将 u 替换为 $\cos \theta$ 。

式 (16.58) 给出了拉普拉斯方程的一般解。我们将会通过一些例子来说明如何应用该式解决具有代表性的问题。但在此之前，我们考虑：从一个已知的特解出发，来揭示勒让德多项式的一个重要性质。

容易验证函数 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 是拉普拉斯方程的解（除了 $\mathbf{r}_0$ 点）。一般来说， $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 不具有方位对称性，但若将 $\mathbf{r}_0$ 放在 z 轴上， φ 的依赖性便会消失。实际上，设 $\mathbf{r}_0 = a \hat{\mathbf{e}}_z$ ，则有：

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = |\mathbf{r} - a \hat{\mathbf{e}}_z| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$$

根据式 (16.58)，解 $1/|\mathbf{r} - a \hat{\mathbf{e}}_z|$ 可表示为：

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}} \right) P_k(\cos \theta)$$

我们关注的是半径为 a 的球内部区域。由于该区域包含原点，因此不允许出现负幂次项，即必须有 $B_k = 0$ 。为了确定 A_k ，在两边取 $\theta = 0$ ，利用 $P_k(1) = 1$ ，得：

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar}} = \frac{1}{|r - a|} = \frac{1}{a - r} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k$$

注意 $r/a < 1$ ，可将左边展开为 r/a 的幂级数：

$$\frac{1}{a - r} = \frac{1}{a(1 - r/a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{a^{k+1}}$$

将上式与前式比较，得：

$$A_k = \frac{1}{a^{k+1}}$$

因此：

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k P_k(\cos \theta), \quad r < a$$

令 $t := r/a$ ， $u := \cos \theta$ ，可得一个非常重要的公式：

$$g(t, u) := \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tu}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \quad (16.59)$$

右边可以看作是函数 $g(t, u)$ 关于 t 的泰勒级数展开。

定理 16.4 函数 $g(t, u) := 1/\sqrt{1 + t^2 - 2tu}$ 在 $t = 0$ 附近的泰勒级数展开中，第 k 阶系数正是勒让德多项式 $P_k(u)$ 。具体地，有：

$$P_k(u) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tu}} \right) \Big|_{t=0} \quad (16.60)$$

函数 $g(t, u)$ 被称为勒让德多项式的生成函数（generating function）。

例 16.3 作为生成函数在势理论中的一个直接应用，我们考虑如下形式的静电或引力势：

解： 该势函数可写为：

$$\Phi(\mathbf{r}) = K \iint_{\Omega} \frac{dQ(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (16.61)$$

其中， K 在静电学中为 k_e ，在引力理论中为 $-G$ ， Q 表示电荷或质量。假设 $r \gg r'$ ，我们可以将 r'/r 记作 t ，并在其幂次下展开 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。关键在于以下展开式：

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(\cos \gamma)$$

其中 γ 是矢量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r}'$ 之间的夹角，展开使用了式 (16.59)。将上述展开代入式 (16.61) 中，得到：

$$\Phi(\mathbf{r}) = K \iint_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r'^k}{r^{k+1}} P_k(\cos \gamma) dQ(\mathbf{r}') = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_k}{r^{k+1}} \quad (16.62)$$

其中我们引入了源分布的第 k 阶“矩”：

$$Q_k := \iint_{\Omega} r'^k P_k(\cos \gamma) dQ(\mathbf{r}') \quad (16.63)$$

这里 $dQ(\mathbf{r}')$ 是源分布的微元，因此 Q_k 是一个与 $\mathbf{r}$ 无关的常数，但 $\cos \gamma$ 是 θ 与 φ 的函数，因此积分完成之后， $\Phi(\mathbf{r})$ 的结果仍依赖于这些角度变量。这些 Q_k 所代表的是源（电荷或质量）分布的内在性质，因而不依赖于观测点（即 θ 和 φ ）。因此在此层次上，使用笛卡尔坐标比球坐标更方便。在笛卡尔坐标下，我们可以将带撇与不带撇的变量完全分离，并将多极矩完全定义为源密度函数的积分。这并不意味着球坐标中无法实现完全的分离。实际上，可以利用球谐函数来完成这种分离。

补充材料：球谐函数实现多极展开的变量分离

设源分布 $dQ(\mathbf{r}')$ 在空间中产生势函数：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

当观测点 $\mathbf{r}$ 远离源区，且 $r' < r$ 时，可以利用球谐函数展开：

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi).$$

代入势函数表达式，并将积分部分定义为球谐多极矩：

$$Q_{\ell m} = \int r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') dQ(\mathbf{r}'),$$

得到变量完全分离的展开式：

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{Q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi).$$

由此可见， $Q_{\ell m}$ 完全由源分布决定，而 θ, φ 依赖于观测点。这种展开实现了变量的彻底分离，使得多极矩在球坐标下具有清晰的物理意义。

16.5 勒让德多项式的性质

从勒让德微分方程、生成函数以及前面导出的其他公式中，我们可以得到一系列关于勒让德多项式的性质与关系式。

16.5.1 奇偶性

最简单且最直接的性质是关于奇偶性的，它由以下公式给出：

$$P_k(-u) = (-1)^k P_k(u) \quad (16.64)$$

这是因为当 k 为偶数时， $P_k(u)$ 仅包含 u 的偶次幂；而当 k 为奇数时，仅包含 u 的奇次幂。该性质可以看作是勒让德多项式定义中的直接推论。

16.5.2 递推关系

对勒让德多项式的生成函数（式 (16.59)）对 t 求导，得到：

$$\frac{u-t}{(1+t^2-2tu)^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}P_k(u) \quad (16.65)$$

将左边重写为：

$$\frac{u-t}{1+t^2-2tu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tu}} = \frac{u-t}{1+t^2-2tu} \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \quad (16.66)$$

其中第二项使用了生成函数（式 (16.59)）展开。将式 (16.65) 与式 (16.66) 的右边相等，并将等式两边乘以 $1+t^2-2tu$ ，得到：

$$(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) + (1+t^2-2tu) \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}P_k(u) = 0$$

展开后变为：

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}P_k(u) - u \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) + \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}P_k(u) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k+1}P_k(u) - 2u \sum_{k=1}^{\infty} kt^k P_k(u) = 0 \end{aligned}$$

为使所有求和中的幂次统一，我们对求和指标作如下代换：令 $k = n-1$ 在第一个与第四项中， $k = n$ 在第二与第五项中， $k = n+1$ 在第三项中，整理后得：

$$\sum_n^{\infty} [P_{n-1}(u) - uP_n(u) + (n+1)P_{n+1}(u) + (n-1)P_{n-1}(u) - 2unP_n(u)] t^n = 0$$

因为幂级数恒为零当且仅当各阶系数全为零，故上式中每个 t^n 项的系数必须满足：

$$(2n+1)uP_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.67)$$

这个递推关系是生成所有勒让德多项式的重要工具。结合 $P_0(u) = 1$ 与 $P_1(u) = u$ ，可以递推计算任意阶的 $P_n(u)$ 。

例 16.4 使用递推关系 (16.67) 推导 $P_2(u)$ 和 $P_3(u)$ 的显式表达式。

解： 对于 $n = 1$ ，递推关系 (16.67) 给出：

$$3uP_1(u) = 2P_2(u) + P_0(u) \Rightarrow 3u^2 = 2P_2(u) + 1 \Rightarrow P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1)$$

对于 $n = 2$ ，有：

$$5uP_2(u) = 3P_3(u) + 2P_1(u) \Rightarrow \frac{5}{2}u(3u^2 - 1) = 3P_3(u) + 2u \Rightarrow P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u)$$

依此类推，可以使用该递推关系继续构造更高阶的勒让德多项式。

递推关系还可以用于计算 $P_n(0)$ ，这在实际问题中是一个有用的量。我们直接给出结论（作业）。当 n 为奇数时，有：

$$P_n(0) = 0$$

当 n 为偶数时，有：

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad (16.68)$$

例 16.5 也可以通过在生成函数式 (16.59) 中令 $u = 0$ 来求得 $P_n(0)$ 。

解： 将 $u = 0$ 代入生成函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(0)$$

左边是 $(1+t^2)^{-1/2}$ ，可以使用二项式展开²²：

$$\begin{aligned} (1+t^2)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (t^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(n-\frac{1}{2})}{n!} t^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} \end{aligned}$$

将右侧与前式右边的级数比较可知，当 n 为奇数时， $P_n(0) = 0$ ，而对于偶数阶有：

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

由于 $2^n n! = (2n)!!$ ，这与之前的公式 (16.68) 一致。

²²

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1. \quad (16.69)$$

16.5.3 正交性

勒让德多项式最有用的性质之一是它们之间的正交性。将 P_n 和 P_m 对应的勒让德微分方程写为:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] + n(n+1)P_n(u) &= 0 \\ \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_m(u)] + m(m+1)P_m(u) &= 0\end{aligned}$$

其中 $P'_n(u)$ 表示对 u 的导数。将第一式两边乘以 $P_m(u)$, 第二式乘以 $P_n(u)$, 然后在 $u \in [-1, 1]$ 上积分, 得到:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] P_m(u) du + n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u) du &= 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_m(u)] P_n(u) du + m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(u)P_n(u) du &= 0\end{aligned} \quad (16.70)$$

对第一个积分部分进行分部积分:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{d}{du} [(1-u^2)P'_n(u)] P_m(u) du &= \underbrace{(1-u^2)P'_n(u)P_m(u)}_{=0, \text{ 因为}(1-u^2)=0 \text{ 在端点处}} \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 (1-u^2)P'_n(u)P'_m(u) du\end{aligned}$$

式 (16.70) 第二行中的第一个积分也得出相同结果。因此, 将两式相减, 得到:

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u) du = 0$$

于是我们得到如下定理:

定理 16.5 若 $m \neq n$, 则有

$$\int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u) du = 0$$

也就是说, 若将内积定义为区间 $[-1, 1]$ 上的定积分, 则不同阶的勒让德多项式是正交的。

我们立即运用前面推导的正交性定理。对生成函数式 (16.59) 的两边平方, 并注意乘积中要引入求和亚指标, 然后在区间 $[-1, 1]$ 上对 u 积分:

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{1+t^2-2tu} = \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u) \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(u) \right) du \quad (16.71)$$

右边可以将求和与积分顺序对调:

$$\text{RHS} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{k+m} \underbrace{\int_{-1}^1 P_k(u)P_m(u) du}_{=0, \text{ 除非 } m=k}$$

根据定理 16.5, 只有 $m = k$ 时积分不为零。因此双重求和简化为单重求和:

$$\text{RHS} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \int_{-1}^1 P_k^2(u) du$$

我们计算左边的积分。令 $y = 1 + t^2 - 2tu$, 则 $dy = -2t du$, 从而:

$$\text{LHS} = -\frac{1}{2t} \int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)]$$

可将其展开为:

$$\frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1} \quad (16.72)$$

由于该函数是 t 的偶函数, 级数中只含有偶次幂。将式 (16.71) 的左右两边结果相等, 得到:

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \int_{-1}^1 P_k^2(u) du$$

对比两边级数中 t^{2k} 的系数, 得:

$$\int_{-1}^1 P_k^2(u) du = \frac{2}{2k+1}$$

将该结果与定理 16.5 中的正交性结合, 并引入克罗内克 (Kronecker) δ_{mn} , 得到勒让德多项式的正交归一化关系:

$$\int_{-1}^1 P_m(u) P_n(u) du = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (16.73)$$

16.5.4 罗德里格公式 (Rodrigues Formula)

我们在讨论勒让德多项式时, 最初是通过将其表示为无穷级数展开, 并根据物理限制对该级数进行了截断。在展开过程中, 我们指出, 通过弗罗贝尼乌斯方法得到的递推关系可以将所有多项式的系数表示为 a_0 和 a_1 的函数。

随后, 我们发现勒让德多项式可以通过生成函数的导数表达为一个“解析”形式。该生成函数在推导公式 (16.73) 的过程中展现出了其强大的作用, 而这也为我们接下来引出著名的罗德里格公式打下了基础。

勒让德多项式还有另一种解析形式的表达式, 即著名的罗德里格公式, 它给出如下形式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (16.74)$$

为了验证右边确实给出了第 n 阶勒让德多项式, 我们可以证明它满足相应的勒让德微分方程。最“优雅”的推导方法是借助复变函数理论, 其中导数可表示为积分形式。设 $f(z) = (z^2 - 1)^n$, 则根据柯西积分公式:

$$(z^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{\xi - z} d\xi$$

结合导数的柯西积分公式和 (16.74), 得到:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] = \frac{1}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

我们计算 $P'_n(z)$ 与 $P''_n(z)$, 对被积函数的分母进行求导:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= \frac{1}{2^n(2\pi i)} \oint_C \frac{d}{dz} \left[\frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} \right] d\xi = \frac{n+1}{2^n(2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi \\ \frac{d^2P}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n(2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+3}} d\xi\end{aligned}$$

将上述表达式代入勒让德方程:

$$(1 - z^2) \frac{d^2P}{dz^2} - 2z \frac{dP}{dz} + n(n+1)P$$

可以写为:

$$\frac{n+1}{2^n(2\pi i)} \oint_C \frac{(\xi^2 - 1)^n [n\xi^2 - 2(n+1)\xi z + n+2]}{(\xi - z)^{n+3}} d\xi$$

容易验证:

$$\frac{(\xi^2 - 1)^n [n\xi^2 - 2(n+1)\xi z + n+2]}{(\xi - z)^{n+3}} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{(\xi^2 - 1)^{n+1}}{(\xi - z)^{n+2}} \right]$$

因此, 被积函数是某函数的导数, 而积分路径是闭合曲线, 因此积分结果为零。

综上所述, 罗德里格公式所定义的 $P_n(x)$ 确实满足勒让德微分方程, 从而证实该表达式确实定义了勒让德多项式。

例 16.6 作为罗德里格公式的一个应用, 计算下列积分:

$$I = \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx \quad \text{其中 } k \leq n$$

解: 方法是将 $P_n(x)$ 用罗德里格公式的右端替换 (见公式 (16.74)), 并反复分部积分。首次分部积分后, 有:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \underbrace{x^k}_u \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]}_{dv} dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left\{ x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 kx^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] dx \right\}\end{aligned}$$

上述右边第一项为零, 这是因为每次对 $(x^2 - 1)^n$ 微分最多降低一个次数, $n-1$ 次微分后, 仍保留因子 $(x^2 - 1)$, 在 $x = \pm 1$ 处都为零。继续分部积分, 得:

$$I = \underbrace{-\frac{kx^{k-1}}{2^n n!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2 - 1)^n] \Big|_{-1}^1}_{=0, \text{同理}} + \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (-1)^2 k(k-1) x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2 - 1)^n] dx$$

重复 k 次分部积分后, 有:

$$I = \frac{(-1)^k}{2^n n!} k! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] dx$$

由于每次微分 $(x^2 - 1)^n$ 仍保持端点值为零的性质, 若 $k < n$, 最终积分仍为零。若 $k = n$, 最后无导数项, 只需直接积分:

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$$

容易得到:

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

代入得:

$$I = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

因此, 可以总结为:

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{若 } k < n \\ \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} & \text{若 } k = n \end{cases} \quad (26.45)$$

如果将 x^k 替换为 x 的任意次数不超过 k 的多项式, 并且 $n > k$, 则积分仍然为零。

16.6 勒让德多项式展开

勒让德多项式的正交性——就像傅里叶三角函数的正交性一样——使得它们在 $(-1, +1)$ 区间上展开函数时非常有用。设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数，则可将其展开为：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (16.75)$$

我们希望求出系数 c_n 。为此，将展开式两边同乘以 $P_m(x)$ 并在 $[-1, 1]$ 上积分。在左边得到：

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx$$

而右边为：

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \right) P_m(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx}_{= \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \text{ 见公式 (16.73)}} = c_m \cdot \frac{2}{2m+1} \end{aligned}$$

令左右两边相等，得到：

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx \quad \text{或记作} \quad c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (16.76)$$

公式 (16.75) 与 (16.76) 给出了将任意定义在 $(-1, 1)$ 区间上的函数 $f(x)$ 展开为勒让德多项式级数的方法。若 $f(x)$ 是次数为 k 的多项式，则它可以表示为不超过 k 阶的勒让德多项式的有限和。事实上，当 $f(x) = x^k$ 时，由例 16.6 可知：

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \quad \text{当 } n > k$$

因此在勒让德级数展开中， k 次以上的所有系数 c_n 全部为零。

例 16.7 我们希望将如下定义的函数 $f(x)$ 展开为勒让德多项式级数：

$$f(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x \leq 1 \\ -V_0, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

解： 根据公式 (16.76)，展开系数 c_n 可由如下积分计算：

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^0 (-V_0) P_n(x) dx + \int_0^1 V_0 P_n(x) dx \right] \\ &= \frac{2n+1}{2} V_0 \left[- \int_{-1}^0 P_n(x) dx + \int_0^1 P_n(x) dx \right] \end{aligned} \quad (16.77)$$

对第一个积分作变量代换 $x = -y$ ，则有：

$$\int_{-1}^0 P_n(x) dx = \int_0^1 P_n(-y) dy = (-1)^n \int_0^1 P_n(x) dx$$

代入 (16.77) 式得:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} V_0 [1 - (-1)^n] \int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ (2n+1) V_0 \int_0^1 P_n(x) dx, & n = 2k+1 \text{ 为奇数} \end{cases}$$

接下来我们计算奇数阶勒让德多项式在 $(0, 1)$ 上的积分。利用罗德里格公式有:

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \int_0^1 \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} [(x^2-1)^{2k+1}] dx$$

按分部积分公式可得:

$$= \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} [(x^2-1)^{2k+1}] \Big|_0^1$$

由于在 $x=1$, 所有项仍含有 (x^2-1) 因此为 0。故只需计算在 $x=0$ 处的项:

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} [(x^2-1)^{2k+1}] \Big|_{x=0} = - \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} (-1)^j \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} x^{2j} \Big|_{x=0}$$

仅当 $j=k$ 时结果非零:

$$= - \binom{2k+1}{k} (-1)^k \cdot (2k)! = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} (-1)^{k+1} (2k)!$$

因此:

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \quad (16.78)$$

代入 c_{2k+1} 表达式:

$$c_{2k+1} = (4k+3) V_0 \cdot \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!}$$

最终展开式为:

$$f(x) = V_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} P_{2k+1}(x) = V_0 \left[\frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) - \dots \right]$$

例 16.8 我们可以直接得到狄拉克 δ 函数的勒让德展开式。其展开系数为:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \delta(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} P_n(0)$$

根据公式 (16.68) 及其前文讨论, 我们知道 $P_n(0)$ 在 n 为奇数时为 0, 因此 $c_n = 0$ (当 n 为奇数), 而当 $n = 2k$ 为偶数时,

$$c_{2k} = \frac{2(2k)+1}{2} \cdot (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{4k+1}{2} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

因此, δ 函数的勒让德展开为:

$$\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(4k+1)(2k)!}{2^{2k+1} (k!)^2} P_{2k}(x)$$

16.7 物理实例

涉及拉普拉斯方程的最常见物理问题出现在静电学中的空腔问题和稳态热传导问题中。在这些问题中，通常给定一个表面，其电势或温度被保持在某个（不一定均匀的）值上，而我们关心的是远离该表面的电势或温度分布。在本节讨论的中，这些表面通常是球面或球面的一部分。

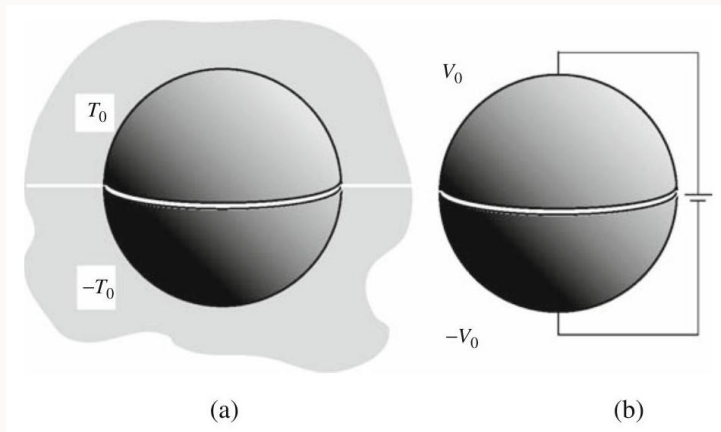


图 109: (a) 温度分别为 T_0 与 $-T_0$ 的两个导热半球组成的整球体。(b) 两个导电半球分别维持电势 V_0 与 $-V_0$ 。上半球极角满足 $0 \leq \theta < \pi/2$ ，即 $0 < \cos \theta \leq 1$ ，下半球为 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ，即 $-1 \leq \cos \theta < 0$ 。

例 16.9 两个半径为 a 的实心导热半球之间通过一层极薄的绝热层隔开，构成一整个球体。两个半球分别接触于温度为 T_0 和 $-T_0$ 的两个（无限大）热源，如图 109 (a) 所示。我们希望求解球体内部的温度分布 $T(r, \theta, \varphi)$ 。

选取球坐标系，使原点位于球心，极轴垂直于赤道面。设温度为 T_0 的半球为北半球。由于问题具有方位对称性， T 与 φ 无关，可直接利用公式 (16.58) 写出一般解。由于原点包含在我们关心的区域中，必须排除 r 的负次幂项，即设所有 $B_n = 0$ ，故解为：

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (16.79)$$

接下来需确定各系数 A_n 。由边界条件知：

$$T(a, \theta) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -T_0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

令 $u = \cos \theta$ ，则有：

$$T(a, u) = \begin{cases} -T_0, & -1 \leq u < 0 \\ T_0, & 0 < u \leq 1 \end{cases}$$

代入展开式 (16.79) 得：

$$T(a, u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(u), \quad \text{其中 } c_n := A_n a^n \quad (16.80)$$

这个展开式（仅变量不同）与例 16.7 中完全一致。由该例可知，所有偶数阶系数为零，奇数阶系数为：

$$c_{2k+1} = A_{2k+1} a^{2k+1} = \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} T_0$$

由此解得：

$$A_{2k+1} = \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \cdot \frac{T_0}{a^{2k+1}}$$

代入 (16.79) 中，得球内温度分布为：

$$T(r, \theta) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \quad (16.81)$$

例 16.10 考虑两个半径为 a 的导电半球，其赤道处由一层很薄的绝缘层隔开，如图 109 (b) 所示。上半球维持在电势 V_0 ，下半球维持在电势 $-V_0$ 。我们希望求出球体外部空间的电势分布。

由于电势在无穷远处趋于零，因此在公式 (16.58) 中不应出现 r 的正次幂项，即 $A_k = 0$ 。为确定 B_k ，令 $r = a$ ，并设 $u = \cos \theta$ ，则：

$$\Phi(a, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{B_k}{a^{k+1}}}_{:=c_k} P_k(u),$$

其中边界条件为：

$$\Phi(a, u) = \begin{cases} -V_0, & -1 < u < 0 \\ +V_0, & 0 < u < 1 \end{cases}$$

系数 c_k 的计算与例 16.7 完全相同，结果为：

$$c_k = 0 \quad (\text{当 } k \text{ 为偶数}), \quad c_{2m+1} = \frac{B_{2m+1}}{a^{2m+2}} = (-1)^m \frac{(4m+3)(2m)!}{2^{2m+1}(m+1)!m!} V_0$$

解得：

$$B_{2m+1} = (-1)^m \frac{(4m+3)(2m)!}{2^{2m+1}m!(m+1)!} a^{2m+2} V_0$$

代入电势展开式中，得到球外电势的多极展开形式：

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m+3)(2m)!}{2^{2m+1}m!(m+1)!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2m+2} P_{2m+1}(\cos \theta) \quad (16.82)$$

值得注意的是，展开式中不含单极项（即 $1/r$ 项），因为两半球的总电荷为零。这与本问题的对称性一致：我们期望两个半球的表面电荷密度大小相等，符号相反。

例 16.11 作为拉普拉斯方程在球坐标系中求解的又一个例子，考虑一个接地的中性导体球，半径为 a ，置于一开始为均匀的电场 E_0 中（如图 110 所示）。我们希望求出球体外部的静电势。

选择电场沿正 z 方向，并将球心置于原点，由于系统具有方位对称性，通解由公式 (16.58) 给出。球外边界包括球面本身以及无穷远处。在无穷远处，电势趋于原始均匀电场的电势，因为球上感应电荷产生的场在远处趋于零。由下式可得该电势：

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{e}}_z = -\nabla \Phi \Rightarrow \Phi(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta), \quad r \rightarrow \infty$$

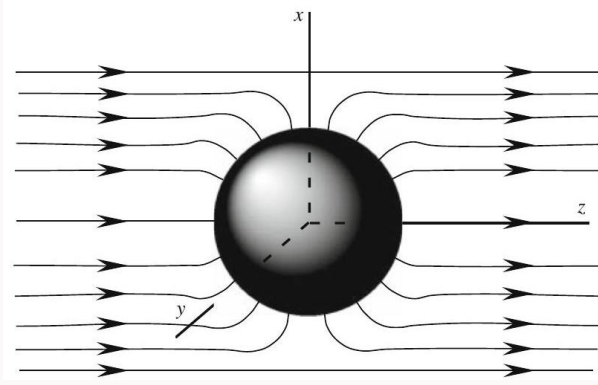


图 110: 导体球体置于均匀外电场中, 远离球体的电场近似保持均匀。

比较此结果与展开式 (16.58) 的渐近形式,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(u) \rightarrow -E_0 r P_1(u),$$

由勒让德多项式的正交性可得:

$$A_k = 0 \quad (k = 0 \quad \text{或} \quad k \geq 2), \quad A_1 = -E_0$$

接下来施加球面边界条件 $\Phi(a, \theta) = 0$:

$$0 = A_1 a P_1(u) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{a^{k+1}} P_k(u) = \frac{B_0}{a} + \left(\frac{B_1}{a^2} - E_0 a \right) P_1(u) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{a^{k+1}} P_k(u)$$

由正交性再次得到:

$$B_0 = 0, \quad B_1 = E_0 a^3, \quad B_k = 0 \quad (k \geq 2)$$

将上述系数代入 (16.58), 得到球外电势分布为:

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) \quad (16.83)$$

由该电势可进一步计算电场:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

分别计算得:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

电场由两部分组成: 原始均匀场

$$\mathbf{E}_0 = E_0 (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

以及球面上感应电荷产生的场

$$\mathbf{E}_{\text{sph}} = \frac{a^3 E_0}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

这与电偶极子场一致，其偶极矩为：

$$p = \frac{a^3 E_0}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$$

值得注意的是，在 $r = a$ 处，电场仅有径向分量 E_r ，符合静电场垂直导体表面的特性。且由边界条件 $E = \sigma/\epsilon_0$ 可得表面电荷密度：

$$\sigma = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

这表明正电荷聚集在“上”半球（图中右侧），而负电荷分布在“下”半球（图中左侧）。

16.8 补充材料：多极展开 (Multipole Expansion)

函数幂级数展开在势理论中具有重要应用。电势或引力势可以表示为

$$\Phi(\mathbf{r}) = K \iint_{\Omega} \frac{dQ(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (16.84)$$

其中 K 对于静电场取 k_e ，对于引力场取 $-G$ ，而 Q 表示电荷或质量。在一些应用中（尤其是静电场中），当场点 P 到原点的距离远大于源点 P' 到原点的距离时，即 $r \gg r'$ ，可将 $\epsilon = r'/r$ 作为小参数进行展开。其关键在于对 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 进行级数展开：

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'}}} \\ &= \frac{1}{r} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^{-1/2} \end{aligned}$$

利用二项式展开公式，取 $\alpha = -\frac{1}{2}$ ， $x = \epsilon^2 - 2\epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'}$ ，保留到 ϵ^2 次，有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'}) + \frac{3}{8}(\epsilon^2 - 2\epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \epsilon\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'} + \epsilon^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^2 \right] + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^3} \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^2 \right] + \cdots \end{aligned} \quad (16.85)$$

将此展开代入 (16.84) 得到：

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{K}{r} \iint_{\Omega} dQ(\mathbf{r}') + \frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \iint_{\Omega} \mathbf{r}' dQ(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{K}{r^3} \iint_{\Omega} r'^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^2 \right] dQ(\mathbf{r}') + \cdots \\ &= \frac{KQ}{r} + \frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}_Q + \frac{K}{r^3} \iint_{\Omega} r'^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'})^2 \right] dQ(\mathbf{r}') + \cdots \end{aligned} \quad (16.86)$$

其中总电量（或质量）为

$$Q := \iint_{\Omega} dQ(\mathbf{r}')$$

称为 Q 的零阶矩。一阶矩（即电偶极矩）定义为：

$$\mathbf{p}_Q := \iint_{\Omega} \mathbf{r}' dQ(\mathbf{r}') \quad (16.87)$$

对于离散源，(16.84) 中的积分改为求和，形式不变。例如 N 个点源 $\{Q_k\}$ 位于位置 $\{\mathbf{r}_k\}$ ，则偶极矩为：

$$\mathbf{p}_Q = \sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{r}_k \quad (16.88)$$

对于两个电荷 $q_1 = +q$ 和 $q_2 = -q$ ，其偶极矩为：

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}_1 - q\mathbf{r}_2 = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (16.89)$$

因此，等量异号电荷偶极矩的大小为电荷量 q 与负电荷指向正电荷的位移向量的乘积。

例 16.12 电偶极子在自然界中相当常见。例如，远离天线的地方可以将其近似为偶极子；在原子跃迁过程中，人们使用所谓的“偶极近似”来计算跃迁速率和态的寿命。

我们来看偶极子势能的显式表达式，即式 (16.86) 右侧第二项。在笛卡尔坐标中，若偶极矩沿 z 轴方向（即 $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{e}}_z$ ），则势函数为：

$$\Phi_{\text{dip}}(x, y, z) = \frac{k_e}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p} = \frac{k_e}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \frac{k_e p z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (16.90)$$

更为重要的是在球坐标中的表达式：

$$\Phi_{\text{dip}}(r, \theta, \varphi) = \frac{k_e p}{r^2} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z}_{=\cos \theta} = \frac{k_e p}{r^2} \cos \theta \quad (16.91)$$

该表达式呈现出方位角对称性（与 φ 无关），这是因为我们选择了 $\mathbf{p}$ 沿 z 轴的方向。

例 16.13 我们已经得到了电偶极子的静电势在球坐标系中。利用梯度公式，我们可以计算电场 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ，其在球坐标系中的三个分量如下：

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \Phi_{\text{dip}}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_e p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{2k_e p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_e p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{k_e p \sin \theta}{r^3} \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_{\text{dip}}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k_e p \cos \theta}{r^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

因此，电偶极子的电场为：

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \frac{k_e p}{r^3} (2\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta) \quad (16.92)$$

这就是偶极子所特有的电场形式。

17 拉普拉斯方程：柱坐标系

在探讨柱坐标系中的具体例题之前，我们先讨论一个具有更广泛意义的问题。变量分离法会将拉普拉斯方程转化为常微分方程，并引入一些分离常数。对于这些常数，不同的符号选择可能导致解的函数形式不同。例如，微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0$$

当 $k > 0$ 时其通解为指数函数，而当 $k < 0$ 时则为三角函数。在没有额外信息的情况下，我们无法预设 k 的符号，因此该常数的符号是未定的，通解的形式也是不确定的。然而，一旦给定边界条件，唯一解将自动出现，而不依赖于我们起初使用的函数形式。下面的推导将展示这个观点，它来自柱坐标系下对拉普拉斯方程进行变量分离时所得到的角变量微分方程。

17.1 常微分方程的分离

对拉普拉斯方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 使用变量分离 $\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)S(\varphi)Z(z)$, 可得如下三个常微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda\rho + \frac{\mu}{\rho} \right) R &= 0, \\ \frac{d^2 S}{d\varphi^2} - \mu S &= 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda Z = 0. \end{aligned} \quad (17.1)$$

我们重点分析关于角变量 φ 的方程。其通解为:

$$S(\varphi) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\mu}\varphi} + Be^{-\sqrt{\mu}\varphi} & \text{当 } \mu \neq 0 \\ C\varphi + D & \text{当 } \mu = 0 \end{cases}$$

不论对势函数 Φ 施加何种边界条件, 我们都要求 $\Phi(\rho, \varphi, z)$ 在 φ 和 $\varphi + 2\pi$ 处取值相等, 因为 (ρ, φ, z) 与 $(\rho, \varphi + 2\pi, z)$ 表示的是空间中的同一个点。因此,

$$S(\varphi + 2\pi) = S(\varphi).$$

若 $\mu = 0$, 则该条件强制 $C = 0$, 从而 $S(\varphi) = D$ 为常数。若 $\mu \neq 0$, 得:

$$Ae^{\sqrt{\mu}(\varphi+2\pi)} + Be^{-\sqrt{\mu}(\varphi+2\pi)} = Ae^{\sqrt{\mu}\varphi} + Be^{-\sqrt{\mu}\varphi},$$

即

$$Ae^{\sqrt{\mu}\varphi}(e^{2\pi\sqrt{\mu}} - 1) + Be^{-\sqrt{\mu}\varphi}(e^{-2\pi\sqrt{\mu}} - 1) = 0.$$

此关系对任意 φ 成立的唯一非平凡可能是:

$$e^{2\pi\sqrt{\mu}} = 1.$$

此式对实数 μ 无非零解, 为得到非平凡解, 我们令 $\sqrt{\mu} = im$, 其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 从而 $\mu = -m^2$ 。在此选择下, $S(\varphi)$ 所满足的方程为:

$$S'' + m^2 S = 0,$$

其通解为正弦与余弦函数的线性组合。

定理 17.1 对于所有物理问题, 其方位角 φ 取值范围为 $[0, 2\pi)$, 必须将分离变量中参数 μ 限定为整数的平方的负数, 即 $\mu = -m^2$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots$ 。角向解因此取以下形式:

$$S(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17.2)$$

其中 A_m 与 B_m 为常数, 且依赖于不同的 m 。

负的 m 值不会产生任何新的解, 因此未包含在 m 的取值范围中。至于 $\mu = 0$ 的情形, 无需单独处理, 因为该情形下可接受的解为 $S = D = \text{常数}$, 这正是式 (17.2) 在 $m = 0$ 时所得的结果。

$Z(z)$ 的微分方程与 m 无关。当 $\lambda > 0$ 时解为指数函数，若记 $\lambda := l^2$ ，则有

$$Z(z) = Ae^{lz} + Be^{-lz} \quad (17.3)$$

最不熟悉的是径向方程，其在 $l = \sqrt{\lambda}$ 的记号下可重写为

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(l^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (17.4)$$

进一步定义变量 $v = l\rho$ ，则上述方程可转化为

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dR}{dv} + \left(1 - \frac{m^2}{v^2} \right) R = 0 \quad (17.5)$$

方程 (17.4) 或 (17.5) 即著名的贝塞尔微分方程 (**Bessel differential equation**)，是数学物理中最重要方程之一。我们将在本章余下部分中研究该方程的解，并列出其性质及相关物理应用示例。

17.2 贝塞尔微分方程的解

弗罗贝尼乌斯方法是求解常微分方程的有效工具。我们将式 (17.5) 两边乘以 v^2 ，使其各项系数变为多项式形式，如式 (16.8) 所示，得：

$$v^2 \frac{d^2 R}{dv^2} + v \frac{dR}{dv} + (v^2 - m^2) R = 0 \quad (17.6)$$

由于 v^2 在 $v = 0$ 处为零，需设解为

$$R(v) = v^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^{k+s}$$

由此得

$$\begin{aligned} v \frac{dR}{dv} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s) v^{k+s} \\ v^2 \frac{d^2 R}{dv^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s)(k+s-1) v^{k+s} \end{aligned}$$

将上述表达式及 $(v^2 - m^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^{k+s}$ 代入微分方程中，得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k [(k+s)^2 - m^2] v^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^{k+s+2} = 0$$

为了找出递推关系，我们需将两个求和式中的幂次统一。为此，将第一个求和式改写为：

$$\begin{aligned} &c_0(s^2 - m^2)v^s + c_1[(s+1)^2 - m^2]v^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k[(k+s)^2 - m^2]v^{k+s} \\ &= c_0(s^2 - m^2)v^s + c_1[(s+1)^2 - m^2]v^{s+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}[(n+2+s)^2 - m^2]v^{n+2+s} \end{aligned}$$

在第二行中，我们对求和变量做了替换 $n = k - 2$ 。由于 n 是哑变量，可以重新记为 k ，从而原方程可整理为：

$$\begin{aligned} &c_0(s^2 - m^2)v^s + c_1[(s+1)^2 - m^2]v^{s+1} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \{c_{k+2}[(k+2+s)^2 - m^2] + c_k\} v^{k+2+s} = 0 \end{aligned}$$

假设 $c_0 \neq 0$ ，并将所有 v 的幂次项系数逐项置零，可得：

$$\begin{aligned} s^2 &= m^2, \quad c_1[(s+1)^2 - m^2] = 0 \\ c_{k+2}[(k+2+s)^2 - m^2] + c_k &= 0 \end{aligned}$$

第一式给出 $s = \pm m$ 。将其代入第二式得：

$$c_1(2s+1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{或} \quad s = -\frac{1}{2}$$

由于 $s = -\frac{1}{2}$ 对应 $m = \pm\frac{1}{2}$ ，我们不考虑这种情形。我们要求 m 为非负整数。因此，唯一可行的是 $s = \pm m$ 且 $c_1 = 0$ 。由递推关系得，所有奇数阶系数 c_{2k+1} 均为零，因此弗罗贝尼乌斯级数解形式为：

$$R(v) = v^{\pm m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} v^{2k}, \quad \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} = -\frac{1}{(2k+2+s)^2 - m^2} \quad (17.7)$$

利用比值判别法检验级数收敛性，有：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2k+2} v^{2k+2}}{c_{2k} v^{2k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2k+2+s)^2 - m^2} \right| v^2 = 0$$

因此该幂级数收敛。

我们现在使用递推关系来求解级数展开的系数。将递推关系重写为：

$$c_{k+2} = -\frac{1}{(k+2+s)^2 - s^2} c_k = -\frac{1}{(k+2)(2s+k+2)} c_k,$$

其中我们将 s^2 代入 m^2 。计算前几项系数：

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2(2s+2)} c_0, \\ c_4 &= -\frac{1}{4(2s+4)} c_2 = (-1)^2 \frac{1}{4(2s+4)} \frac{1}{2(2s+2)} c_0, \\ c_6 &= -\frac{1}{6(2s+6)} c_4 = (-1)^3 \frac{1}{6(2s+6)} \frac{1}{4(2s+4)} \frac{1}{2(2s+2)} c_0, \end{aligned}$$

因此一般项为：

$$c_{2k} = (-1)^k \underbrace{\frac{1}{2k \cdot (2k-2) \cdots 2}}_{=2^k k!} \underbrace{(2s+2k)(2s+2k-2) \cdots (2s+2)}_{=2^k (s+k)(s+k-1) \cdots (s+1)} c_0.$$

将分子和分母同时乘以 $s!$ ，得：

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{s!}{2^{2k} k! (s+k)!} c_0. \quad (17.8)$$

将 (17.8) 代入 (17.7) 可得：

$$R(v) = c_0 s! v^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (s+k)!} v^{2k} = c_0 s! 2^s \left(\frac{v}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (s+k)!} \left(\frac{v}{2}\right)^{2k},$$

其中我们将 s 代入 v 的指数部分，并对和式内外的幂进行了整理。常将 c_0 取为 $1/(s!2^s)$ ，从而得到：

定义 17.1 贝塞尔函数 $J_s(x)$ 定义为

$$J_s(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (17.9)$$

该级数对于任意 x 都收敛。

虽然公式 (17.9) 的推导假定 m （因此 s ）为整数，但移除此限制后，所得到的级数仍在全域收敛，因此可以用它来定义任意实数阶，甚至复数阶的贝塞尔函数。此时 $(s+n)!$ 可通过伽马函数定义，因此公式 (17.9) 可视为贝塞尔函数在任意阶数下的统一定义。

17.3 贝塞尔方程的第二个解

如同勒让德多项式的情形，我们可以利用公式 (14.25) 为贝塞尔微分方程构造第二个线性无关的解。对于贝塞尔方程，其系数函数为 $p(x) = 1/x$ 。以 $J_m(x)$ 为第一个解，代入该公式并令 $C = 0$ ，可得第二个解：

$$Z_m(x) = K J_m(x) \int_{\alpha}^x \frac{1}{J_m^2(u)} \exp \left[- \int_c^u \frac{dt}{t} \right] du = A_m J_m(x) \int_{\alpha}^x \frac{du}{u J_m^2(u)},$$

其中 $A_m := Kc$ 和 α 是由约定决定的任意常数。需要注意的是，与 $J_m(x)$ 不同， $Z_m(x)$ 在 $x = 0$ 处表现不良，这是由于被积函数的分母中含有 u 所致。

虽然上述方法构造了贝塞尔微分方程的第二个解，但这并不是常规的做法。事实上，当 s 不是整数时， $J_{-s}(x)$ 与 $J_s(x)$ 线性无关，可以作为第二个解。然而，更常见的第二个解是下列形式的线性组合：

$$Y_s(x) = \frac{J_s(x) \cos s\pi - J_{-s}(x)}{\sin s\pi}, \quad (17.10)$$

该函数被称为第二类贝塞尔函数 (Bessel function of the second kind)，或称诺依曼函数 (Neumann function)。

当 s 为整数时，上式不再适用，因为根据恒等式 $\cos n\pi = (-1)^n$ 以及公式 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ ，分母 $\sin s\pi$ 在 $s = n$ 处为零，导致函数不定。此时，我们采用洛必达法则定义极限：

$$\begin{aligned} Y_n(x) &:= \lim_{s \rightarrow n} Y_s(x) = \lim_{s \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial s} [J_s(x) \cos s\pi - J_{-s}(x)]}{\pi \cos n\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{s \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_s(x)}{\partial s} - (-1)^n \frac{\partial J_{-s}(x)}{\partial s} \right]. \end{aligned}$$

从式 (17.9) 出发，可以计算 $J_s(x)$ 关于 s 的导数：

$$\frac{\partial J_s}{\partial s} = J_s(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^s \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(s+k+1)}{k! \Gamma(s+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \quad (17.11)$$

其中

$$\Psi(x) := \frac{d}{dx} \ln[(x-1)!] = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (17.12)$$

是 Γ 函数的对数导数，即 Ψ 函数（也称为 Digamma 函数）。类似地，

$$\frac{\partial J_{-s}}{\partial s} = -J_{-s}(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(-s+k+1)}{k! \Gamma(-s+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}. \quad (17.13)$$

将以上结果代入式 (17.10) 的定义，并利用恒等式 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ，可以得到诺依曼函数的表达式：

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(n+k+1)}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(k-n+1)}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}. \end{aligned} \quad (17.14)$$

从式 (17.14) 可见, 诺依曼函数 $Y_s(x)$ 在 $x = 0$ 处不良定义, 这是贝塞尔方程第二解 (如 $Z_m(x)$) 的普遍特征。

由于 $Y_s(x)$ 与 $J_s(x)$ 在任意 s (整数或非整数) 下线性无关, 因此 $\{J_s(x), Y_s(x)\}$ 构成贝塞尔方程的一组通解基底。特别地, 在柱坐标系中径向方程 (见式 (17.1) 的第一式) 的通解可写为

$$R(\rho) = AJ_m(v) + BY_m(v) = AJ_m(l\rho) + BY_m(l\rho), \quad (17.15)$$

其中 A 和 B 是常数, $v = l\rho$, $l = \sqrt{\lambda}$ 。

17.4 贝塞尔函数的性质

我们已经讨论了贝塞尔函数的一些基本性质。本节将回顾这些性质，并推导出其他常用的贝塞尔函数恒等式。

17.4.1 负整数阶

我们得到了整数阶贝塞尔函数与其负阶对应函数之间的关系。该关系如下：

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (17.16)$$

这说明当阶数为整数时，负阶贝塞尔函数并不产生新的函数形式，尤其在构造通解时，这一恒等式十分重要。

17.4.2 递推关系式

我们曾推导了一些整数阶贝塞尔函数及其导数之间的递推关系式，现重述如下。第一个不含导数的关系式为：

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \quad (17.17)$$

第二个关系式涉及贝塞尔函数的导数：

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \quad (17.18)$$

将以上两式组合可得：

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) &= \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x), \\ J_{m+1}(x) &= \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x). \end{aligned} \quad (17.19)$$

我们可以利用这些等式推导出一些更实用的关系。例如，对 $x^m J_m(x)$ 求导：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] &= mx^{m-1} J_m(x) + x^m J'_m(x) \\ &= x^m \left[\frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x) \right] = x^m J_{m-1}(x), \end{aligned}$$

其中使用了式 (17.17) 与 (17.18) 的组合关系。对上式积分（严格来说是求原函数）可得：

$$\int x^m J_{m-1}(x) dx = x^m J_m(x) \quad (17.20)$$

类似地，可以验证：

$$\int x^{-m} J_{m+1}(x) dx = -x^{-m} J_m(x) \quad (17.21)$$

17.4.3 正交性

贝塞尔函数满足与勒让德多项式类似的正交性关系。但与勒让德多项式不同，贝塞尔函数的正交性不是由其阶数决定的，而是由其自变量中的参数所决定。

考虑相同方位角参数、但不同径向参数的贝塞尔方程两个解。更具体地，令 $f(\rho) = J_m(k\rho)$, $g(\rho) = J_m(l\rho)$ ，则有

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) f &= 0, \\ \frac{d^2 g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} + \left(l^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) g &= 0.\end{aligned}$$

将第一式乘以 ρg ，第二式乘以 ρf ，然后两式相减，可得：

$$\frac{d}{d\rho} [\rho (fg' - gf')] = (k^2 - l^2) \rho fg, \quad (17.22)$$

其中，' 表示对 ρ 的导数。对上式从某个初值 a 积分到终值 b ，得到

$$[\rho (fg' - gf')]_a^b = (k^2 - l^2) \int_a^b \rho f(\rho) g(\rho) d\rho. \quad (17.23)$$

在所有物理应用中，我们可以选择合适的 a 和 b 使得等式左边为零。因此，将 f 和 g 以贝塞尔函数表示代入式 (17.23) 中，得到

$$(k^2 - l^2) \int_a^b \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho) d\rho = 0.$$

从而若 $k \neq l$ ，则积分为零，即

$$\int_a^b \rho J_m(k\rho) J_m(l\rho) d\rho = 0 \quad \text{如果 } k \neq l. \quad (17.24)$$

这就是贝塞尔函数的正交关系。

为了完整地表述正交归一关系，我们还必须讨论 $k = l$ 的情形，即计算积分 $\int \rho J_m^2(k\rho) d\rho$ 。作变量代换 $x = k\rho$ ，积分化为 $\int x J_m^2(x) dx / k^2$ 。定义

$$I \equiv \int J_m^2(x) \cdot x dx = \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \int J_m(x) J_m'(x) x^2 dx.$$

在第二项中，利用贝塞尔微分方程（将 (17.5) 中的 v 换为 x ）

$$x^2 J_m(x) = m^2 J_m(x) - x J_m'(x) - x^2 J_m''(x),$$

代入得

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \int J_m'(x) [m^2 J_m(x) - x J_m'(x) - x^2 J_m''(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - m^2 \int J_m(x) J_m'(x) dx + \int x J_m'^2(x) dx + \int x^2 J_m'(x) J_m''(x) dx.\end{aligned}$$

利用恒等式

$$[x^2 J_m'^2(x)]' = 2x J_m'^2(x) + 2x^2 J_m'(x) J_m''(x),$$

则有

$$\int x^2 J'_m(x) J''_m(x) dx = \frac{1}{2} \int [x^2 J_m'^2(x)]' dx - \int x J_m'^2(x) dx,$$

从而上述 I 化简为:

$$I = \frac{1}{2} x^2 J_m^2(x) - \frac{1}{2} m^2 J_m^2(x) + \frac{1}{2} x^2 J_m'^2(x).$$

返回变量 ρ , 得到不定积分

$$\int \rho J_m^2(k\rho) d\rho = \frac{I}{k^2} = \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(k\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 [J'_m(k\rho)]^2. \quad (17.25)$$

在实际应用中, 积分的下限通常取为零, 上限为正数 a 。我们考察式 (17.25) 的右端在下限 $\rho = 0$ 处的行为。注意:

- 当 $m > 0$ 时, 由贝塞尔函数的幂级数展开式 (17.9) 可知 $J_m(0) = 0$;
- 当 $m = 0$ 时, 括号中项 $\left(\rho^2 - \frac{m^2}{k^2}\right)$ 亦在 $\rho = 0$ 处为零;
- 第二项含有因子 ρ^2 , 故在 $\rho = 0$ 处亦为零。

因此, 对于所有 $m \geq 0$, 下限项为零。于是,

$$\int_0^a \rho J_m^2(k\rho) d\rho = \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(ka) + \frac{1}{2} a^2 [J'_m(ka)]^2. \quad (17.26)$$

由公式 (17.16), 该结果也适用于负整数阶的贝塞尔函数。通常我们令 ka 为 $J_m(x)$ 的一个零点 (使得 $J_m(ka) = 0$), 从而简化式 (17.26) 的右端。

记 x_{mn} 为 $J_m(x)$ 的第 n 个零点, 即 $J_m(x_{mn}) = 0$, 则

$$ka = x_{mn} \Rightarrow k = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

此时由 (17.19) 可得

$$\int_0^a \rho J_m^2\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) d\rho = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2. \quad (17.27)$$

最后, 我们将正交性关系 (17.24) 与 (17.27) 合并为一个带克罗尼克 δ 符号的统一公式:

定理 17.2 设 $J_m(x)$ 是贝塞尔函数, x_{mn} 是其第 n 个零点, $a > 0$, 则有以下正交性关系成立:

$$\int_0^a J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mk}\rho}{a}\right) \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2 \delta_{kn} \quad (17.28)$$

其中 δ_{kn} 为克罗尼克 δ 符号。

17.4.4 生成函数

与勒让德多项式类似, 整数阶贝塞尔函数也具有一个生成函数, 即存在某一函数 $g(x, t)$, 使得

$$g(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \quad (17.29)$$

为了求出生成函数 $g(x, t)$, 从递推关系式出发:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

两边同时乘以 t^m 并对 m 从 $-\infty$ 到 ∞ 求和, 得到

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m-1}(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m+1}(x) = \frac{2}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m t^m J_m(x) \quad (17.30)$$

第一项可写为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m-1}(x) = t \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) = t g(x, t)$$

其中用到了换元 $n = m - 1$ 。类似地, 第二项为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_{m+1}(x) = \frac{1}{t} g(x, t)$$

右侧的和为

$$\frac{2}{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m t^m J_m(x) = \frac{2t}{x} \frac{\partial g}{\partial t}$$

代入 (17.30) 中得:

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) g(x, t) = \frac{2t}{x} \frac{\partial g}{\partial t}$$

整理得:

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{dg}{g}$$

两边积分得到

$$\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) = \ln g + \ln \phi(x)$$

即

$$g(x, t) = \phi(x) \exp\left(\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \quad (17.31)$$

为确定 $\phi(x)$, 将 (17.32) 写成乘积形式并展开为幂级数:

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \phi(x) \exp\left(\frac{x}{2}t\right) \exp\left(-\frac{x}{2t}\right) \\ &= \phi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt/2)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x/2t)^m}{m!} \\ &= \phi(x) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m} t^{n-m} \end{aligned}$$

在上述双重求和中, 收集所有 t 的零次幂项, 并记为 S_0 。这对应于 $n = m$, 于是

$$S_0 = \phi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \phi(x) J_0(x)$$

另一方面, 根据生成函数的定义式 (17.29), S_0 就是 $J_0(x)$, 因此 $S_0 = J_0(x)$, 可知 $\phi(x) = 1$ 。综上, 贝塞尔函数的生成函数最终写为:

$$g(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \quad (17.32)$$

例 17.1 贝塞尔函数的生成函数可用于导出一个有用的恒等式。

我们先注意到

$$g(x+y, t) = g(x, t) g(y, t)$$

这是可以直接验证的。展开两边得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x+y) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(x) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(y) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{k+m} J_k(x) J_m(y) \end{aligned} \quad (17.33)$$

在双重求和中令 $n = k + m$, 即 $k = n - m$, 于是得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(x) J_m(y) \right)$$

由于每个 t^n 的系数必须在两边都相等, 我们得出贝塞尔函数的加法公式:

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(x) J_m(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \quad (17.34)$$

其中最后一个等式利用了 $J_n(x+y)$ 在 x 与 y 交换下的对称性。

17.4.5 贝塞尔函数的积分表示

利用贝塞尔函数的生成函数, 还可以导出一些非常重要的恒等式。在式 (17.32) 中令 $t = e^{i\theta}$, 我们可以得到:

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x) \quad (17.35)$$

这是关于 θ 的傅里叶级数展开, 其系数即为贝塞尔函数。为了求解这些系数, 我们将两边同时乘以 $e^{-im\theta}$, 并在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分:

左边的积分为:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-im\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta \quad (17.36)$$

右边的积分为:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right] J_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta_{nm} J_n(x) = 2\pi J_m(x) \quad (17.37)$$

其中我们使用了以下积分公式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{若 } n \neq m \\ 2\pi & \text{若 } n = m \end{cases} = 2\pi \delta_{nm} \quad (17.38)$$

比较两边可得贝塞尔函数的积分表示式:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta \quad (17.39)$$

可以验证，上式可进一步化为更常见的贝塞尔积分公式：

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta \quad (17.40)$$

式 (17.40) 表明贝塞尔函数 $J_m(x)$ 可以表示为 θ 的余弦函数在 $[0, \pi]$ 区间上的积分形式，这在解析计算与近似处理中十分有用。

17.4.6 贝塞尔函数与合流超几何函数的关系

贝塞尔函数可以用合流超几何函数（confluent hypergeometric function）表示。为此，令

$$R(v) = v^\mu e^{-\eta v} f(v) \quad (17.41)$$

其中 μ 和 η 是待定参数，将该形式代入贝塞尔微分方程 (17.5)，可得：

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + \left(\frac{2\mu + 1}{v} - 2\eta \right) \frac{df}{dv} + \left[\frac{\mu^2 - m^2}{v^2} - \frac{\eta(2\mu + 1)}{v} + \eta^2 + 1 \right] f = 0 \quad (17.42)$$

若取 $\mu = m$ 且 $\eta = i$ ，上式化简为：

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + \left(\frac{2m + 1}{v} - 2i \right) \frac{df}{dv} - \frac{(2m + 1)i}{v} f = 0 \quad (17.43)$$

进一步令 $t = 2iv$ ，并将 (17.43) 乘以 t ，得：

$$t \frac{d^2 f}{dt^2} + (2m + 1 - t) \frac{df}{dt} - \left(m + \frac{1}{2} \right) f = 0 \quad (17.44)$$

这是标准的合流超几何微分方程形式：

$$t f'' + (\gamma - t) f' - \alpha f = 0 \quad (17.45)$$

其中 $\alpha = m + \frac{1}{2}$ ， $\gamma = 2m + 1$ 。因此，贝塞尔函数 $J_m(x)$ 可以表示为形如 $x^m e^{-ix} \Phi(\alpha, \gamma; 2ix)$ 的函数的常数倍，即：

$$J_m(x) = \frac{1}{\Gamma(m + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^m e^{-ix} \Phi \left(m + \frac{1}{2}, 2m + 1; 2ix \right) \quad (17.46)$$

该式展示了贝塞尔函数与合流超几何函数之间的联系。

17.5 贝塞尔函数展开

贝塞尔函数的正交性使其在函数展开中非常有用，其基本思想与傅里叶级数和勒让德多项式的展开类似。设函数 $f(\rho)$ 在区间 $(0, a)$ 上定义，则可以将其展开为

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right), \quad (17.47)$$

其中 x_{mn} 是贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个零点。

设 $f(\rho)$ 在 $[0, a]$ 上可积，且 $J_m(x_{mn}) = 0$ ，则在贝塞尔函数正交性的基础上，展开系数 c_n 可由下式给出：

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^a f(\rho) J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right) \rho d\rho. \quad (17.48)$$

证明： 将式 (17.47) 两边乘以 $\rho J_m \left(\frac{x_{mk} \rho}{a} \right)$ 并在 $[0, a]$ 上积分，有：

$$\int_0^a f(\rho) J_m \left(\frac{x_{mk} \rho}{a} \right) \rho d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^a J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mk} \rho}{a} \right) \rho d\rho.$$

由正交性定理，仅当 $n = k$ 时积分不为零，于是解出 c_k 得：

$$c_k = \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(x_{mk})} \int_0^a f(\rho) J_m \left(\frac{x_{mk} \rho}{a} \right) \rho d\rho.$$

将 k 换为一般指标 n 即得证。

上述定理与傅里叶级数展开、勒让德多项式展开共同揭示了在不同正交函数系下函数展开的统一结构。

例 17.2 三角函数可以非常容易地用贝塞尔函数展开。事实上，由公式 (17.35)

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x)$$

令 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，可得：

$$e^{ix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) \quad (17.49)$$

将右边按偶次项和奇次项拆分，有：

$$\cos x + i \sin x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{2k} J_{2k}(x) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{2k+1} J_{2k+1}(x)$$

其中第一个求和为实数部分，第二个求和为纯虚部。于是，

$$\cos x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k J_{2k}(x) + J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x)$$

对第一个求和项作变量替换 $k \rightarrow -k$ ，得：

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k J_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} J_{-2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (-1)^{2k} J_{2k}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x)$$

因此, 最终得到余弦函数的贝塞尔展开式为:

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \quad (17.50)$$

类似地, 正弦函数的展开式为:

$$\sin x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x) \quad (17.51)$$

定理 17.3 (帕塞瓦尔恒等式) 设函数 $f(\rho)$ 在区间 $(0, a)$ 上可以展开为贝塞尔函数级数:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right),$$

其中 x_{mn} 是 $J_m(x)$ 的第 n 个零点。则有如下帕塞瓦尔恒等式成立:

$$\int_0^a f^2(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \quad (17.52)$$

证明: 将展开式两边平方并乘以 ρ , 对 $\rho \in (0, a)$ 积分, 有

$$\int_0^a f^2(\rho) \rho d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n c_k \int_0^a J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) \rho d\rho$$

由贝塞尔函数的正交性 (定理 17.2), 积分部分为

$$\int_0^a J_m \left(\frac{x_{mn} \rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \delta_{nk}$$

于是上式化简为

$$\int_0^a f^2(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 J_{m+1}^2(x_{mn})$$

例 17.3 设函数 $f(\rho) = \rho^k$, 欲将其在区间 $(0, a)$ 上展开为贝塞尔函数的级数形式。根据公式 (17.47) 和 (17.48), 我们选择以 J_k 为基底函数进行展开:

$$\rho^k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_k \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) \quad (17.53)$$

其中系数 c_n 给出为

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{k+1}^2(x_{kn})} \int_0^a \rho^{k+1} J_k \left(\frac{x_{kn} \rho}{a} \right) d\rho \quad (17.54)$$

解: 对积分变量作代换 $y = \frac{x_{kn} \rho}{a}$, 则有

$$d\rho = \frac{a}{x_{kn}} dy, \quad \rho = \frac{ay}{x_{kn}} \Rightarrow \rho^{k+1} = \left(\frac{ay}{x_{kn}} \right)^{k+1}$$

故积分变为

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{k+1}^2(x_{kn})} \cdot \frac{a^{k+2}}{x_{kn}^{k+2}} \int_0^{x_{kn}} y^{k+1} J_k(y) dy$$

应用公式 (17.20):

$$\int y^k J_{k-1}(y) dy = y^k J_k(y) \Rightarrow \int y^{k+1} J_k(y) dy = y^{k+1} J_{k+1}(y)$$

从而得:

$$c_n = \frac{2a^k}{x_{kn} J_{k+1}(x_{kn})} \quad (17.55)$$

将其代回原级数表示, 得:

$$\rho^k = 2a^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_k\left(\frac{x_{kn}\rho}{a}\right)}{x_{kn} J_{k+1}(x_{kn})} \quad (17.56)$$

17.6 物理实例

在我们对拉普拉斯方程的讨论中已经看到：三角函数是笛卡尔坐标系中“自然”的函数，勒让德多项式则在球坐标系中起着类似的作用。因此，我们现在并不感到惊讶：贝塞尔函数是柱坐标系中“自然”的函数。

与笛卡尔坐标系和球坐标系中的情形类似，除非问题的对称性使情况简化，否则对拉普拉斯方程的分离变量通常会引入两个分离常数，从而导致一个双重求和项。在球坐标系中我们没有得到双重求和，是因为从一开始就假设了方位角对称性。

在柱坐标系中拉普拉斯方程的最一般解将包含一个双重求和项。其中一个求和指标为 m ，如公式 (17.2) 所示，它既出现在 ϕ 方向的正弦与余弦函数中，也决定了贝塞尔函数或诺依曼函数的阶数。

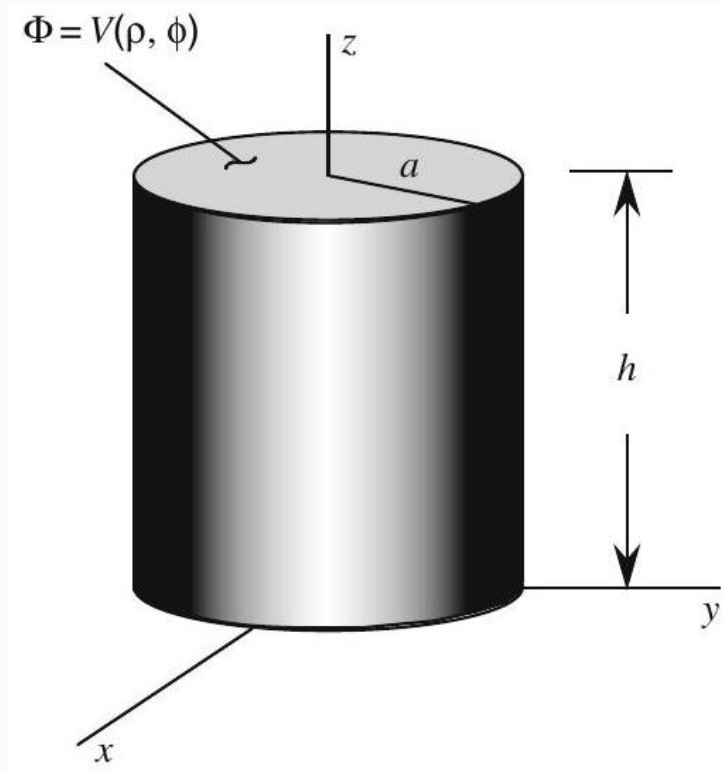


图 111: 一个导电圆柱罐，其顶部电势为 $V(\rho, \theta)$ ，其余表面接地。

设有一圆柱形导体罐，其半径为 a 、高度为 h ，如图 111 所示。假设其顶部电势为 $V(\rho, \varphi)$ ，其余表面接地。我们要求该罐内部任意点的静电势分布 $\Phi(\rho, \varphi, z)$ 。

由于该问题在柱坐标中具有明确的边界条件，我们考虑使用分离变量法。由公式 (17.2)、(17.3) 和 (17.15)，设通解为：

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)S(\varphi)Z(z). \quad (17.57)$$

由于底面接地，即 $\Phi(\rho, \varphi, 0) = 0$ ，我们必须令 $Z(0) = 0$ ，从而得：

$$Z(z) = \sinh(lz). \quad (17.58)$$

又因 $\Phi(0, \varphi, z)$ 有限, 排除诺依曼函数项, 仅保留贝塞尔函数项:

$$R(\rho) = J_m(l\rho). \quad (17.59)$$

侧面接地意味着 $\Phi(a, \varphi, z) = 0$, 这要求:

$$J_m(la) = 0 \Rightarrow l = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.60)$$

其中 x_{mn} 表示 J_m 的第 n 个零点。

综上, 将三个分量乘积并对所有可能的 m 和 n 求和 (注意负 m 与正 m 对应项线性相关), 得到所谓的 **傅里叶-贝塞尔展开**:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}z\right) [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)], \quad (17.61)$$

其中 A_{mn} 和 B_{mn} 是待定常数。

边界条件 顶部电势为 $V(\rho, \varphi) = \Phi(\rho, \varphi, h)$, 代入 (17.61) 得:

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}h\right) [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)]. \quad (17.62)$$

两边乘以 $\rho J_m\left(\frac{x_{mk}}{a}\rho\right) \cos(m\varphi)$, 在 $\rho \in [0, a]$ 和 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 上积分, 利用正交性公式 (17.28) 可得:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}h\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \varphi) J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \cos(m\varphi), \\ B_{mn} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}h\right)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \varphi) J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sin(m\varphi). \end{aligned} \quad (17.63)$$

若问题具有方位角对称性, 即顶面电势 $V(\rho, \varphi)$ 与 φ 无关, 则在贝塞尔函数展开中只需考虑 $m = 0$ 的情形。由于 $S(\varphi)$ 为常数, 其导数为零, 代入方程 (17.1) 的第二个方程可知:

$$\mu = -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0. \quad (17.64)$$

因此, 通解中的双重求和简化为单重求和, 势函数 Φ 可写为:

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}z\right), \quad (17.65)$$

其中 x_{0n} 为 $J_0(x)$ 的第 n 个零点。将 $m = 0$ 代入公式 (17.63), 即可得到展开系数 A_n :

$$A_n = \frac{4}{a^2 J_1^2(x_{0n}) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}h\right)} \int_0^a \rho V(\rho) J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right) d\rho, \quad (17.66)$$

其中 $V(\rho)$ 是顶面给定的电势分布, 仅为 ρ 的函数。

例 17.4 设一个圆柱形导体罐高为 h 、半径为 a ，其顶面保持恒定电势 V_0 ，而侧面与底面均接地。我们希望求得罐内部任意点处的静电势分布 $\Phi(\rho, z)$ 。

解： 由于顶面电势与角度 φ 无关，问题具有方位对称性，因此使用公式 (17.66) 计算展开系数 A_n ：

$$A_n = \frac{4V_0}{a^2 J_1^2(x_{0n}) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}h\right)} \int_0^a \rho J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right) d\rho. \quad (17.67)$$

由积分恒等式 (17.20) 可知：

$$\int_0^a \rho J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right) d\rho = \frac{a}{x_{0n}} J_1(x_{0n}), \quad (17.68)$$

将其代入上式得到：

$$A_n = \frac{4V_0}{x_{0n} J_1(x_{0n}) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}h\right)}. \quad (17.69)$$

因此，罐内的电势为：

$$\Phi(\rho, z) = 4V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}z\right)}{x_{0n} J_1(x_{0n}) \sinh\left(\frac{x_{0n}}{a}h\right)}. \quad (17.70)$$

18 数学物理中的其他偏微分方程

我们已经讨论了数学物理中最重要的偏微分方程之一——拉普拉斯方程。求解拉普拉斯方程所用的技术几乎适用于初等物理中遇到的所有偏微分方程。由于我们已经花费了相当多的时间介绍这些技术，本章将主要通过几个例子来说明它们在其他偏微分方程中的应用。

18.1 热传导方程

热传导方程（有时也称为扩散方程）已给出。令解具有分离变量形式 $T(t, \mathbf{r}) = g(t)R(\mathbf{r})$ ，代入热传导方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}[g(t)R(\mathbf{r})] = k^2 \nabla^2[g(t)R(\mathbf{r})] \Rightarrow R(\mathbf{r}) \frac{dg}{dt} = k^2 g(t) \nabla^2 R(\mathbf{r}) \quad (18.1)$$

两边同时除以 $g(t)R(\mathbf{r})$ ，得到：

$$\frac{1}{g(t)} \frac{dg}{dt} = k^2 \underbrace{\frac{1}{R(\mathbf{r})} \nabla^2 R(\mathbf{r})}_{:=-\lambda} \quad (18.2)$$

左边仅为 t 的函数，右边仅为 $\mathbf{r}$ 的函数。由于两变量独立，等式两边必须等于常数。为后续方便，记该常数为 $-k^2\lambda$ ，从而得到一个关于时间的常微分方程和一个关于空间的偏微分方程：

$$\frac{dg}{dt} + k^2\lambda g = 0, \quad \nabla^2 R + \lambda R = 0 \quad (18.3)$$

第一个常微分方程的通解为：

$$g(t) = Ae^{-k^2\lambda t} \quad (18.4)$$

第二个方程与前几章中的拉普拉斯方程非常类似，可以用相同的方法求解。我们将在以下几个例子中加以说明。但在此之前，需要注意的是， λ 必须为正，否则公式 (18.4) 中的指数函数将随着时间增长导致 $g(t)$ （即温度）发散。

18.1.1 热传导棒

考虑一根一维热传导棒，其一端位于原点 $x = 0$ ，另一端位于 $x = b$ ，两端始终保持在 $T = 0$ 的温度。假设初始时刻 $t = 0$ ，棒上存在某种已知的温度分布 $f(x)$ ，我们希望求出任意时刻 t 和任意位置 x 上的温度分布 $T(x, t)$ 。

由于系统具有一维性质，可以忽略 y 与 z 的依赖性，拉普拉斯算符简化为对 x 的二阶导数。因此，方程 (18.3) 中关于空间的偏微分方程变为：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \quad (18.5)$$

其通解为：

$$X(x) = B \cos(\sqrt{\lambda}x) + C \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (18.6)$$

根据边界条件 $T(t, 0) = 0 = T(t, b)$ ，可得：

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}b) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}b = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由于 λ 必须为正，故只取正整数值的 n 。于是本征值和本征函数分别为：

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.7)$$

时间方程的解也可以直接得到：

$$g_n(t) = A_n e^{-k^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \quad (18.8)$$

从而，温度的通解为：

$$T(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi k}{b}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \quad (18.9)$$

其中 $B_n := A_n C_n$ 。初始条件 $T(0, x) = f(x)$ 给出：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \quad (18.10)$$

这是一个正弦傅里叶级数，其系数由如下公式给出：

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) dx \quad (18.11)$$

因此，只要知道初始温度分布 $f(x)$ ，就可以求出任意时刻的温度分布。例如，如果初始温度分布为常数 T_0 ，则

$$B_n = \frac{2T_0}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) dx = \frac{2T_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (18.12)$$

由此可见，只有奇数项 n 有贡献。设 $n = 2m + 1$ ，则

$$B_{2m+1} = \frac{4T_0}{\pi(2m+1)} \quad (18.13)$$

代入通解 (18.9)，可得温度随时间演化的表达式：

$$T(t, x) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\left[\frac{(2m+1)\pi k}{b}\right]^2 t}}{2m+1} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{b} x\right) \quad (18.14)$$

上式可用于数值模拟任何已知热导率 k 的导体的温度演化情况。需要指出的是，随着时间推移，指数因子使得温度逐渐趋于零——这是两端恒定为零温度的自然结果。正如通式 (18.9) 所揭示的那样，这一结论与初始温度分布 $f(x)$ 无关。

18.1.2 矩形板中的热传导问题

作为一个涉及两个空间变量的复杂例子，考虑一个长为 a 、宽为 b 的矩形导热板，其四边保持温度为零。设初始时刻 $t = 0$ 板上的温度分布为某给定函数 $f(x, y)$ 。我们希望求出任意时刻 $t > 0$ 和任意点 (x, y) 的温度分布。

此问题对应的热传导方程的空间部分为：

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \lambda R = 0 \quad (18.15)$$

采用分离变量法，设 $R(x, y) = X(x)Y(y)$ ，代入后得：

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{:=-\mu} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{:=-\nu} + \lambda = 0 \quad (18.16)$$

从而得到两个常微分方程:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \mu X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \nu Y = 0, \quad \lambda = \mu + \nu \quad (18.17)$$

由边界条件:

$$T(0, y, t) = T(a, y, t) = T(x, 0, t) = T(x, b, t) = 0$$

可知解必须是正弦函数, 从而分离常数为:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, & X_n(x) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & n &= 1, 2, \dots \\ \nu_m &= \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, & Y_m(y) &= B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), & m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而分离变量产生的参数 λ 是双指标的:

$$\lambda_{mn} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

时间部分的解为指数函数:

$$g_{mn}(t) = C_{mn} e^{-k^2 \lambda_{mn} t}$$

将三部分组合后得到总解:

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k^2 \lambda_{mn} t} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (18.18)$$

其中 $A_{mn} = A_n B_m C_{mn}$ 是待定常数。由初始条件 $T(x, y, 0) = f(x, y)$, 可得:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

由正交性可得系数公式:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (18.19)$$

18.1.3 圆形板中的热传导

考虑一个半径为 a 的圆形板, 其边缘保持在温度 $T = 0$, 初始温度分布为某函数 $f(\rho, \varphi)$ 。我们希望求得该薄板在任意时间的温度分布 $T(\rho, \varphi, t)$ 。

在柱坐标系下, 假设温度与 z 无关, 热传导方程的空间部分为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \lambda R = 0 \quad (18.20)$$

进行变量分离, 设 $R(\rho, \varphi) = \mathcal{R}(\rho)S(\varphi)$, 代入得

$$S(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18.21)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \mathcal{R} = 0 \quad (18.22)$$

第二个方程是贝塞尔微分方程，其满足 $\rho = 0$ 处有界且在 $\rho = a$ 处为零的解为

$$\mathcal{R}(\rho) = C J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right), \quad \text{其中} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.23)$$

其中 x_{mn} 是 $J_m(x)$ 的第 n 个零点。

时间方程的解为

$$g(t) = D_{mn} \exp(-k^2 \lambda t) = D_{mn} \exp \left(-k^2 \frac{x_{mn}^2}{a^2} t \right) \quad (18.24)$$

于是，温度分布的一般解为

$$T(\rho, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) e^{-\left(\frac{k x_{mn}}{a}\right)^2 t} [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] \quad (18.25)$$

系数由初始条件 $T(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi)$ 给出：

$$f(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] \quad (18.26)$$

从正交性出发，可得系数为：

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) \cos(m\varphi) d\rho \quad (18.27)$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) \sin(m\varphi) d\rho \quad (18.28)$$

若初始温度分布 $f(\rho)$ 与 φ 无关，仅含 $m = 0$ 项，故解简化为

$$T(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{x_{0n}}{a} \rho \right) e^{-\left(\frac{k x_{0n}}{a}\right)^2 t} \quad (18.29)$$

其中系数 A_n 为

$$A_n = \frac{4}{a^2 J_1^2(x_{0n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{x_{0n}}{a} \rho \right) d\rho \quad (18.30)$$

该结果表明，若初始温度分布无 φ 依赖，则在后续时间中温度分布仍保持轴对称性。

18.2 薛定谔方程

在第 1 章中，我们已将薛定谔方程中的时间部分与空间部分分离，得到如下两个方程：

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(\mathbf{r})]\psi = 0, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{E}{i\hbar}T \quad (18.31)$$

其中 E 是分离变量过程中出现的能量常数。我们使用 ψ 表示空间波函数而非 R ，因为后者通常用于表示球坐标（或柱坐标）中径向变量的函数。时间部分的微分方程非常容易求解，其通解为：

$$T(t) = Ae^{-iEt/\hbar} = Ae^{-i\omega t}, \quad \text{其中 } \omega := \frac{E}{\hbar} \quad (18.32)$$

我们接下来将重点分析式 (18.31) 中的第一个方程，即**定态薛定谔方程**，它描述了粒子在空间中的行为。

18.2.1 无限深方势阱

一个质量为 μ 的微观粒子被限制在一个边长分别为 a, b, c 的长方体盒子中（即三维无限深势阱）。在这种情形下，粒子的行为由自由粒子的薛定谔方程描述，即 $V = 0$ 。因此，式 (18.31) 中的第一个方程变为：

$$\nabla^2\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (18.33)$$

进行变量分离，设 $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ ，得到如下常微分方程：

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \sigma Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + \nu Z = 0 \quad (18.34)$$

其中 $\lambda + \sigma + \nu = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ 。这些方程连同如下边界条件：

$$\begin{aligned} \psi(0, y, z) = \psi(a, y, z) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 = X(a), \\ \psi(x, 0, z) = \psi(x, b, z) = 0 &\Rightarrow Y(0) = 0 = Y(b), \\ \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, c) = 0 &\Rightarrow Z(0) = 0 = Z(c), \end{aligned} \quad (18.35)$$

将导致如下解（略去常数因子）：

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad \text{对于 } n = 1, 2, \dots, \\ Y_m(y) &= \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad \sigma_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad \text{对于 } m = 1, 2, \dots, \\ Z_l(z) &= \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right), \quad \nu_l = \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2 \quad \text{对于 } l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中边界条件 (18.35) 来源于对粒子在盒外的存在概率为零、波函数连续的要求。这种情况不适用于有限深势阱中的粒子，因为粒子存在“隧穿”出势阱的概率。

时间部分的解为：

$$T(t) = e^{-i\omega_{lmn}t}, \quad \text{其中 } \omega_{lmn} = \frac{\hbar}{2\mu} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2 \right]$$

因此，满足上述边界条件的薛定谔方程解为：

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{l, m, n=1}^{\infty} A_{lmn} e^{-i\omega_{lmn}t} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

其中系数 A_{lmn} 由初始波函数 $\psi(x, y, z, 0)$ 决定。具体而言，令 $t = 0$ ，两边乘以三个变量上的正弦函数之积并在各变量上积分，得到：

$$A_{lmn} = \frac{8}{abc} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \psi(x, y, z, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

粒子的能量为：

$$E = \hbar\omega_{lmn} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right)$$

每组正整数 (n, m, l) 表示粒子的一个量子态。若该盒子为立方体，即 $a = b = c := L$ ，则粒子能量为：

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2} (n^2 + m^2 + l^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu V^{2/3}} (n^2 + m^2 + l^2), \quad (18.36)$$

其中 $V = L^3$ 是盒子的体积。基态为 $(1, 1, 1)$ ，能量为 $E = 3\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ ，是非简并态。而更高的能级通常是简并的，例如三种不同的态 $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 对应相同的能量 $E = 6\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ 。随着 n, m, l 增大，简并度也快速增加。式 (18.36) 可写为：

$$n^2 + m^2 + l^2 = R^2, \quad \text{其中} \quad R^2 = \frac{2\mu EV^{2/3}}{\hbar^2\pi^2}$$

这形式类似于 nml -空间中的球面方程。若 R 很大，则能量小于或等于 E 的量子态数即为该球第一卦限的体积²³。

设满足条件的态数为 N ，则有：

$$N = \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi}{3} \right) R^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\mu EV^{2/3}}{\hbar^2\pi^2} \right)^{3/2} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2\pi^2} \right)^{3/2} V$$

因此，单位体积中的态密度为：

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\mu}{\hbar^2\pi^2} \right)^{3/2} E^{3/2} \quad (18.37)$$

这是固体物理中的一个重要公式，因为 E （稍加修改以考虑自旋）就是费米能级。若以 E_f 表示费米能量，则由式 (18.37) 可得 $E_f = \alpha n^{2/3}$ ，其中 α 为某一常数。

18.2.2 简谐振子

我们考虑一个处于一维简谐振子势阱中的粒子，一维定态薛定谔方程为：

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi = 0 \quad (18.38)$$

²³ (n, m, l) 为正整数

其中, E 为粒子的总能量, $V(x)$ 为势能函数, μ 为粒子质量。对于一维简谐振子 (势能为弹簧型势), 有:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 := \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (18.39)$$

代入薛定谔方程, 得到:

$$\psi''(x) - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi(x) + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad (18.40)$$

为了简化该方程, 引入无量纲变量:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}y \quad (18.41)$$

在该变量下, 方程变为:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y^2\psi + \frac{2E}{\hbar\omega}\psi = 0 \quad (18.42)$$

我们可以使用弗罗贝尼乌斯幂级数方法求解方程 (18.42)。然而, 根据传统做法, 我们首先考察其在 $y \rightarrow \infty$ 极限下解的行为。在此极限下, 方程中最后一项可以忽略, 从而方程简化为:

$$\psi'' - y^2\psi \approx 0 \quad (18.43)$$

该方程的近似解易得为指数函数 $e^{\pm y^2/2}$ 。由于正指数项在 $y \rightarrow \infty$ 时发散, 我们必须舍弃该项, 仅保留负指数项。这是物理边界条件 (波函数需在无穷远处趋于零) 所要求的。因此, 我们考虑将解写成下列形式, 其中将渐进行为单独提取出来:

$$\psi(y) := H(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (18.44)$$

将其代入原方程 (18.42) 中, 得到关于 $H(y)$ 的微分方程:

$$H''(y) - 2yH'(y) + \lambda H(y) = 0 \quad \text{其中} \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \quad (18.45)$$

这正是埃尔米特微分方程 (**Hermite differential equation**)。

为了用弗罗贝尼乌斯方法求解埃尔米特微分方程, 我们设解为幂级数形式

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n \quad (18.46)$$

则有

$$\begin{aligned} H'(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} y^n \\ H''(y) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) c_{n+1} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} y^n, \end{aligned}$$

将以上两式代入埃尔米特微分方程

$$H'' - 2yH' + \lambda H = 0$$

得到

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + \lambda c_n] y^n}_{:=S_1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} y^{n+1} = 0 \quad (18.47)$$

将 S_1 中 $n=0$ 项单独分离并重命名指标得:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2c_2 + \lambda c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + \lambda c_n] y^n \\ &= 2c_2 + \lambda c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+3)c_{n+3} + \lambda c_{n+1}] y^{n+1} \end{aligned}$$

将其代入式 (18.47) 并整理:

$$2c_2 + \lambda c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+3)c_{n+3} + \lambda c_{n+1} - 2(n+1)c_{n+1}] y^{n+1} = 0$$

令各阶系数为零, 得到递推关系:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{\lambda}{2} c_0 \\ c_{n+3} &= \frac{2(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+3)} c_{n+1}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

更换指标 $n \rightarrow n-1$ 并统一表示为:

$$c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n \geq 0 \quad (18.48)$$

由比值检验可知, 级数对于任意 y 都收敛。然而, 从物理角度出发, 为使波函数满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$, 我们必须要求级数在某处终止。下面我们将解释这一点的原因。

埃尔米特多项式的构造 由于我们关注的是 ψ (从而也是 H) 在 x (或 y) 趋于无穷大时的行为, 因此我们可以集中研究 $H(y)$ 级数中 y 的高次幂项。我们将其偶次项与奇次项分开写为:

$$\begin{aligned} H(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} y^{2k+1} \\ &= P_{2M+1}(y) + \sum_{k=M+1}^{\infty} c_{2k} y^{2k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} c_{2k+1} y^{2k+1} \\ &= P_{2M+1}(y) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2M+2} y^{2k+2M+2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2M+3} y^{2k+2M+3}, \end{aligned} \quad (18.49)$$

其中 $P_{2M+1}(y)$ 是将前若干项整理成的多项式, M 为一个很大的正整数。

对于非常大的 n , 递推关系式给出

$$c_{n+2} \approx \frac{2n}{(n+1)(n+2)} c_n \approx \frac{2}{n} c_n \Rightarrow c_n \approx \frac{2}{n-2} c_{n-2},$$

若迭代若干次则得到

$$c_n \approx \frac{2^k}{(n-2)(n-4) \cdots (n-2k)} c_{n-2k}.$$

特别地,

$$c_{2k+N} \approx \frac{2^k}{(2k+N-2)(2k+N-4)\cdots N} c_N. \quad (18.50)$$

为了得到 (18.49) 中的各项系数, 设 $N = 2M + 2$, 则有

$$\begin{aligned} c_{2k+2M+2} &\approx \frac{2^k}{(2k+2M)(2k+2M-2)\cdots(2M+2)} c_{2M+2} \\ &= \frac{2^k}{[2(k+M)][2(k+M-1)]\cdots[2(M+1)]} c_{2M+2} \\ &= \frac{1}{(k+M)(k+M-1)\cdots(M+1)} c_{2M+2} = \frac{M!}{(k+M)!} c_{2M+2}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

同理, 对于奇次项, 有

$$\begin{aligned} c_{2k+2M+3} &\approx \frac{2^k(2M+1)!!}{(2k+2M+1)!!} c_{2M+3} \\ &= \frac{2^k[2(M+1)]!/[2^{M+1}(M+1)!]}{[2(k+M+1)]!/[2^{k+M+1}(k+M+1)!]} c_{2M+3} \\ &= 2^{2k} \frac{[2(M+1)]!(k+M+1)!}{(M+1)![2(k+M+1)]!} c_{2M+3}. \end{aligned} \quad (18.52)$$

使用斯特林近似²⁴可进一步验证, 上式进一步近似为

$$c_{2k+2M+3} \approx \frac{(M+1)!}{(k+M+1)!} c_{2M+3}. \quad (18.53)$$

将所有系数表示为两个常数 (c_{2M+2} 与 c_{2M+3}) 的函数后, 式 (18.49) 可重写为:

$$\begin{aligned} H(y) &= P_{2M+1}(y) + c_{2M+2}M! y^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+2M}}{(k+M)!} + c_{2M+3}(M+1)! y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+2M+2}}{(k+M+1)!} \\ &= P_{2M+1}(y) + c_{2M+2}M! y^2 \sum_{j=M}^{\infty} \frac{y^{2j}}{j!} + c_{2M+3}(M+1)! y \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{y^{2j}}{j!} \end{aligned} \quad (18.54)$$

第一项求和可以写成:

$$\sum_{j=M}^{\infty} \frac{y^{2j}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{2j}}{j!} - \sum_{j=0}^{M-1} \frac{y^{2j}}{j!} = e^{y^2} - Q_{2M-2}(y), \quad (18.55)$$

其中 $Q_{2M-2}(y)$ 是关于 y 的次数不超过 $2M-2$ 的多项式。第二项求和可用相同方式处理。将所有多项式部分合并为 $\mathcal{P}_{2M+1}(y)$, 最终得到

$$H(y) \approx \mathcal{P}_{2M+1}(y) + \underbrace{c_{2M+3}(M+1)!}_{:=\alpha_M} y e^{y^2} + \underbrace{c_{2M+2}M!}_{:=\beta_M} y^2 e^{y^2}, \quad (18.56)$$

即:

$$H(y) \approx \mathcal{P}_{2M+1}(y) + (\alpha_M y + \beta_M y^2) e^{y^2}.$$

我们现在回到 $\psi(y)$ 并注意到:

$$\psi(y) = H(y)e^{-y^2/2} \approx \underbrace{\mathcal{P}_{2M+1}(y)e^{-y^2/2}}_{\rightarrow 0 \text{ 当 } y \rightarrow \infty} + \underbrace{(\alpha_M y + \beta_M y^2)e^{y^2/2}}_{\rightarrow \infty \text{ 当 } y \rightarrow \infty} \quad (18.57)$$

²⁴ $x! := \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2}$

因为任何指数衰减项都会压倒多项式的增长，所以如果 $H(y)$ 是无穷级数，则 $\psi(y)$ 将在无穷远处发散。这从物理角度意味着粒子有无限概率出现在无穷远处，这显然是不合理的。

为避免该非物理解，必须重新检查 $H(y)$ 的性质。和勒让德多项式的情况类似，为使解物理可接受， $H(y)$ 必须是有限项多项式。这只有当递推关系中的分子为零时才可能发生，即当

$$\lambda = 2m$$

从而可以得到著名的量子简谐振子的能级量子化：

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2m \Rightarrow E = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (18.58)$$

当 $\lambda = 2m$ 时，递推关系式 (18.48) 可重写为

$$c_n = \frac{2(n-m-2)}{n(n-1)} c_{n-2} = -\frac{2(m+2-n)}{n(n-1)} c_{n-2}, \quad m \geq n \geq 2 \quad (18.59)$$

由于当 $n > m$ 时，分子为零，级数终止，因此 $H(y)$ 是次数为 m 的多项式。通过递推，可得一般项形式：

$$c_n = (-1)^k \frac{2^k(m+2-n)(m+4-n)\cdots(m+2k-n)}{n(n-1)\cdots(n-2k+1)} c_{n-2k} \quad (18.60)$$

我们需要分别考虑 n 为偶数与奇数的情形。当 $n = 2k$ 时，有：

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{2^k m(m-2)(m-4)\cdots(m+2-2k)}{(2k)!} c_0 \quad (18.61)$$

该表达式构成埃尔米特多项式的系数结构。

由于递推关系 (18.48) 的分子在某个整数之后必须为零，结合 $2n = 4k$ 的形式，我们可以令 $\lambda = 4j$ ，即 $m = \lambda/2 = 2j$ ，其中 j 为非负整数。此时，可以验证

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{2^{2k} j!}{(2k)!(j-k)!} c_0 \quad (18.62)$$

因此，偶数阶埃尔米特多项式 $H_{2j}(y)$ 可写为：

$$H_{2j}(y) = c_0^{(j)} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k 2^{2k} j!}{(2k)!(j-k)!} y^{2k} \quad (18.63)$$

其中 $c_0^{(j)}$ 是与 j 有关的归一化常数，为区分不同 j 的情况而加上上标。类似地，奇数阶埃尔米特多项式可写为：

$$H_{2j+1}(y) = c_1^{(j)} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k 2^{2k+1} j!}{(2k+1)!(j-k)!} y^{2k+1} \quad (18.64)$$

为使埃尔米特多项式符合标准定义，通常取以下常数：

$$c_0^{(j)} = \frac{(-1)^j (2j)!}{j!}, \quad c_1^{(j)} = \frac{(-1)^j (2j+1)!}{j!} \quad (18.65)$$

代入上述表达式后，埃尔米特多项式（无论奇偶）可以统一地表达为：

$$H_n(y) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r n!}{(n-2r)! r!} (2y)^{n-2r} \quad (18.66)$$

其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。

埃尔米特多项式的正交性 埃尔米特多项式满足类似于勒让德多项式的正交性关系。我们可以通过如下方法推导该关系：将 $H_m(x)$ 的微分方程乘以 $H_n(x)e^{-x^2}$ ，将 $H_n(x)$ 的微分方程乘以 $H_m(x)e^{-x^2}$ ，然后相减。

引入权函数 e^{-x^2} 看似人为，但对埃尔米特和勒让德多项式等经典正交多项式的深入分析表明，正交性成立必须依赖特定的权函数。之所以在勒让德多项式中未出现，是因为其权函数为常数 1。上述操作将得到以下结果：

$$(H_m'' H_n - H_n'' H_m - 2x H_m' H_n + 2x H_n' H_m) e^{-x^2} + (2m - 2n) H_m H_n e^{-x^2} = 0 \quad (18.67)$$

可以验证，第一项是下式的导数：

$$\frac{d}{dx} [(H_m' H_n - H_n' H_m) e^{-x^2}] \quad (18.68)$$

因此我们有：

$$\frac{d}{dx} [(H_m' H_n - H_n' H_m) e^{-x^2}] + (2m - 2n) H_m H_n e^{-x^2} = 0 \quad (18.69)$$

对整个实数轴积分得：

$$(H_m' H_n - H_n' H_m) e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (2m - 2n) \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (18.70)$$

由于首项在无穷远处因 e^{-x^2} 衰减而为零，最终我们得到：

若 $m \neq n$ ，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (18.71)$$

埃尔米特多项式的生成函数 根据定义，生成函数应具有如下展开形式：

$$g(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n H_n(x) \quad (18.72)$$

其中 a_n 为待定常数。对 x 求导（将 t 视为常数）得：

$$\frac{dg}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n H_n'(x) \quad (18.73)$$

其中和式从 $n = 1$ 开始，是因为 $H_0'(x) = 0$ 。由于 $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$ （作业），于是：

$$\frac{dg}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n (2n) H_{n-1}(x) = 2t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} H_{n-1}(x) \quad (18.74)$$

我们选择 a_n 满足递推关系 $n a_n = a_{n-1}$ ，于是：

$$\frac{dg}{dx} = 2t \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} H_{n-1}(x) = 2t \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m H_m(x) = 2tg \quad (18.75)$$

因此，

$$\frac{dg}{g} = 2tdx \Rightarrow \ln g = 2tx + \ln C(t) \Rightarrow g(t, x) = C(t) e^{2tx} \quad (18.76)$$

其中积分常数 $C(t)$ 可能依赖于 t 。根据递推关系,

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \quad (18.77)$$

所以:

$$g(t, x) = C(t)e^{2tx} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (18.78)$$

将 a_0 吸收进 $C(t)$, 为了确定 $C(t)$, 令 $x = 0$ 并使用 $H_n(0)$ 的表达式 (作业):

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(-1)^k (2k)!}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} = e^{-t^2} \quad (18.79)$$

从而得到埃尔米特多项式的生成函数为:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (18.80)$$

定理 18.1 设生成函数 $g(t, x) := e^{2tx-t^2}$, 则其泰勒展开式中的第 n 阶系数正好是埃尔米特多项式 $H_n(x)$ 。即:

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2} \right|_{t=0} \quad (18.81)$$

埃尔米特多项式满足如下带权正交性关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdot 2^n n! \delta_{mn} \quad (18.82)$$

由埃尔米特多项式的生成函数 (公式 (18.80)):

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (18.83)$$

两边平方后乘以 e^{-x^2} 并在 $x \in (-\infty, \infty)$ 上积分, 左边计算如下:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2(2tx-t^2)} e^{-x^2} dx = e^{-2t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+4tx} dx \\ &= e^{-2t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2t)^2+4t^2} dx = e^{2t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2t)^2} dx \\ &= e^{2t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} e^{2t^2} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t^2)^n}{n!} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n}}{n!} \end{aligned} \quad (18.84)$$

右边展开为两级数相乘, 并利用正交性公式 (18.71) 得:

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_m(x) \right) e^{-x^2} dx \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^{m+n}}{m!n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx \end{aligned} \quad (18.85)$$

比较两边系数可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdot 2^n n! \quad (18.86)$$

从而得到公式 (18.82)。

18.2.3 氢原子

当电子围绕含有 Z 个质子的原子核运动时, 其系统的势能为 $V(r) = -Ze^2/r$ 。在采用单位制令普朗克常数 $\hbar$ 和电子质量为 1 的情况下, 式 (18.31) 给出的定态薛定谔方程变为:

$$\nabla^2 \Psi + \left(2E + \frac{2Ze^2}{r} \right) \Psi = 0 \quad (18.87)$$

该方程的径向部分由式 (12.47) 中第一式给出, 此处令 $f(r) = 2E + 2Ze^2/r$ 。定义 $u = rR(r)$, 可将径向方程写为:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\lambda + \frac{a}{r} - \frac{\alpha}{r^2} \right) u = 0 \quad (18.88)$$

其中 $\lambda = 2E$, $a = 2Ze^2$ 。将变量变换为 $r = kz$ (其中 k 是待定常数), 可进一步简化上述方程:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(\lambda k^2 + \frac{ak}{z} - \frac{\alpha}{z^2} \right) u = 0 \quad (18.89)$$

令 $\lambda k^2 = -\frac{1}{4}$, 并引入 $\beta := \frac{a}{2\sqrt{-\lambda}}$, 上述方程化为:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta}{z} - \frac{\alpha}{z^2} \right) u = 0 \quad (18.90)$$

分别考察 $z \rightarrow \infty$ 与 $z \rightarrow 0$ 的极限情况。对于前者, 式 (18.90) 化为:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{1}{4} u = 0 \Rightarrow u = e^{-z/2} \quad (18.91)$$

对于后者, 主导项为 α/z^2 , 方程近似为:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\alpha}{z^2} u = 0 \quad (18.92)$$

令 $u(z) = z^m$, 代入得:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = m(m-1)z^{m-2} \Rightarrow m(m-1) = \alpha \quad (18.93)$$

由定理 16.2 可知 $\alpha = l(l+1)$, 故 $m = l+1$ 。提取上述两种极限形式, 设原方程解形如:

$$u(z) = z^{l+1} e^{-z/2} f(z) \quad (18.94)$$

代入式 (18.90) 可得关于 $f(z)$ 的新微分方程:

$$f'' + \left[\frac{2(l+1)}{z} - 1 \right] f' - \frac{l+1-\beta}{z} f = 0 \quad (18.95)$$

两边乘以 z 得:

$$zf'' + [2(l+1) - z]f' - (l+1-\beta)f = 0 \quad (18.96)$$

该方程即合流超几何方程, 其解为:

$$f(z) \propto \Phi(l+1-\beta, 2l+2; z) \quad (18.97)$$

因此, 式 (18.88) 的解为:

$$u(z) = Cz^{l+1} e^{-z/2} \Phi(l+1-\beta, 2l+2; z) \quad (18.98)$$

由讨论谐振子时的相似结论可知，令合流超几何函数 $\Phi(l+1-\beta, 2l+2; z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时不发散。这一条件要求超几何级数终止，即：

$$l+1-\beta = -N \quad (18.99)$$

其中 $N \geq 0$ 为整数。在此情形下， Φ 退化为拉盖尔多项式：

$$L_N^j(x) := \frac{\Gamma(N+j+1)}{\Gamma(N+1)\Gamma(j+1)} \Phi(-N, j+1; x), \quad \text{其中 } j = 2l+1 \quad (18.100)$$

条件 (18.99) 即为类氢原子能级的量子化条件。将 β 表为整数 $n = N+l+1$ ，并恢复 μ 和 $\hbar$ ，则类氢原子能级为：

$$E = -\frac{Z^2 \mu e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Z^2 \left(\frac{\mu c^2}{2} \right) \alpha^2 \frac{1}{n^2} \quad (18.101)$$

其中 $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ 是精细结构常数。径向波函数为：

$$R_{n,l}(r) = \frac{u_{n,l}(r)}{r} = C r^l e^{-Zr/(na_0)} \Phi \left(-n+l+1, 2l+2; \frac{2Zr}{na_0} \right) \quad (18.102)$$

其中 $a_0 = \hbar^2/(me^2) = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$ 是玻尔半径。拉盖尔多项式的显式表达可由式 (18.100) 中的终止超几何级数给出：

$$L_N^j(x) = \frac{\Gamma(N+j+1)}{\Gamma(N+1)} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k N!}{(N-k)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(j+1+k)\Gamma(k+1)} x^k \quad (18.103)$$

利用

$$\frac{\Gamma(k-N)}{\Gamma(-N)} = (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!} \quad (18.104)$$

可得拉盖尔多项式的最终形式：

$$L_N^j(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(N+j)!(-1)^k}{(N-k)!k!(k+j)!} x^k \quad (18.105)$$

拉盖尔多项式的生成函数 设生成函数为

$$g_j(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n L_n^j(x) \quad (18.106)$$

对 x 求导，利用

$$\frac{d}{dx} L_N^j(x) = -L_{N-1}^{j+1}(x) \quad (18.107)$$

我们得到：

$$\frac{\partial g_j}{\partial x} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n L_{n-1}^{j+1}(x) = -t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n-1} L_{n-1}^{j+1}(x) = -t g_{j+1}(t, x) \quad (18.108)$$

令 $a_n = 1$ ，则

$$g_j(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^j(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{n!j!} t^n = (1-t)^{-j-1} \quad (18.109)$$

由此我们引入新函数

$$g_j(t, x) = (1 - t)^{-j-1} g(t, x) \quad (18.110)$$

将其代入 (18.108) 得

$$\frac{\partial g}{g} = -\frac{t}{1-t} dx \Rightarrow g(t, x) = C(t) e^{-tx/(1-t)} \quad (18.111)$$

最终得到生成函数形式:

$$g_j(t, x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^{j+1}} \quad (18.112)$$

定理 18.2 设

$$g_j(t, x) := \frac{e^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^{j+1}} \quad (18.113)$$

则其泰勒展开式中的第 n 阶系数即为 $L_n^j(x)$:

$$L_n^j(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{e^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^{j+1}} \Big|_{t=0} \quad (18.114)$$

18.3 波动方程

在前述各节中, 时间变量只出现为一阶导数项。因此, 就时间而言, 我们处理的是一阶常微分方程。这意味着只需给出所研究物理量 (如温度 T 或薛定谔波函数 ψ) 的初始值, 就能唯一确定其解。波动方程为:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (18.115)$$

该方程包含时间的二阶导数项, 因此其通解中需包含两个任意常数。为确定这两个常数, 我们需要两个初始条件。例如, 在两端固定的绳子中产生的驻波情形, 仅知道绳子的初始形状不足以唯一确定波函数, 还需给出绳子上各点的初始 (横向) 速度, 即初始速度分布。

例 18.1 最简单的波动方程为一维情形, 例如绳子上的波动, 其方程为:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (18.116)$$

其中 c 为波传播速度, 对于绳子来说, $c = \sqrt{\tau/\rho}$, 其中 τ 为张力, ρ 为线密度。

设绳子长度为 a , 两端固定, 即在 $x = 0$ 和 $x = a$ 处, 位移 $\psi = 0$ 。进行变量分离, 设 $\psi(x, t) = X(x)T(t)$, 代入得到两个常微分方程:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T = 0 \quad (18.117)$$

第一个方程结合边界条件解为:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.118)$$

第二个方程的通解为:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{cn\pi}{a} \quad (18.119)$$

因此, 一般解为:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (18.120)$$

设初始位形为 $\psi(x, 0) = f(x)$, 由傅里叶级数展开得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (18.121)$$

同样, 如果给定初始速度分布 $\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$, 则对时间求导并取 $t = 0$ 得:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad B_n = \frac{2}{a\omega_n} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (18.122)$$

其中 ω_n 被称为第 n 阶振动模频率。一般解即为无穷多个振动模的线性叠加。实际中可通过适当的初始条件激发某一或有限多个模。

18.3.1 圆形膜的振动

圆形鼓面上的波动在数学物理发展史上具有重要意义，因为其研究首次引出了贝塞尔函数的应用。本例即讨论圆形膜上的波动。

对于覆盖圆柱的圆形膜，波动方程 (18.115) 在柱坐标下变为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (18.123)$$

对变量进行分离，得：

$$S(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi \quad \text{其中 } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

最后一个方程是贝塞尔微分方程，其在 $\rho = 0$ 处有界且在 $\rho = a$ 处为零的解为：

$$R(\rho) = E J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right), \quad \text{其中 } \frac{\omega}{c} = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.124)$$

这表明仅有频率 $\omega_{mn} = \frac{c}{a} x_{mn}$ 被激发。若设初始膜形为 $f(\rho, \varphi)$ ，且初始速度为零，则 $D = 0$ ，通解为：

$$\psi(\rho, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{c x_{mn}}{a} t \right) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \quad (18.125)$$

其中，

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) \cos m\varphi$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a} \rho \right) \sin m\varphi$$

在推导中使用了贝塞尔函数的正交性。特别地，若初始位移 $f(\rho)$ 与 φ 无关，则仅 $m = 0$ 项保留，有：

$$\psi(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{x_{0n}}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{c x_{0n}}{a} t \right) \quad (18.126)$$

其中，

$$A_n = \frac{4}{a^2 J_1^2(x_{0n})} \int_0^a d\rho \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{x_{0n}}{a} \rho \right) \quad (18.127)$$

注意：在演化过程中，波动不会产生 φ 方向的依赖性。

19 格林函数初步

19.1 傅里叶变换与格林函数

设我们有一个关于 n 个未知量的 n 元线性方程组，目标是求解该系统。一个方便的方法是使用矩阵。记 $\mathbf{L}$ 为系数矩阵， $\mathbf{y}$ 为未知量列向量， $\mathbf{f}$ 为右端常数列向量。整个方程组可以用矩阵方程以及其对应的分量形式表示为：

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \sum_{j=1}^n L_{ij}y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19.1)$$

如果 $\mathbf{L}$ 存在逆矩阵 $\mathbf{G}$ ，即存在 $\mathbf{G}$ 使得 $\mathbf{L}\mathbf{G} = \mathbf{1}$ ，则该线性方程组的解可以形式上写为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

或在分量形式下表示为：

$$y_i = \sum_{j=1}^n G_{ij}f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19.2)$$

这表明求解线性方程组的问题转化为求解系数矩阵的逆，而这个逆矩阵一旦确定，与右端向量 $\mathbf{f}$ 的具体取值无关。只要给定新的 $\mathbf{f}$ ，都可以直接用已知的 $\mathbf{G}$ 计算出对应的解。

注意单位矩阵的元素正是克罗尼克 δ 符号，因此逆矩阵 $\mathbf{G}$ 满足的条件可以写为：

$$\mathbf{L}\mathbf{G} = \mathbf{1}, \quad \sum_{j=1}^n L_{ij}G_{jk} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (19.3)$$

这个思想正是格林函数方法的基础，其将在连续变量的偏微分方程背景下推广。

现在我们将列向量 $\mathbf{v}$ 看作一个“机器”：给它一个从 1 到 n 的整数输入，它将输出一个实数，即该指标对应的向量分量。类似地，矩阵 $\mathbf{M}$ 也可以看作一个机器：输入两个从 1 到 n 的整数，它将输出一个实数。我们可以将这一过程写作：

$$\mathbf{v}(i) = v_i, \quad \text{以及} \quad \mathbf{M}(i, j) = M_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (19.4)$$

我们是否可以将这个“机器”的作用推广到实数集合？即，若向量机器接受任意实数作为输入，它就变成一个函数：函数接受一个实数并返回一个实数。将 i 替换为 x ，我们有 $\mathbf{v}(x) = v_x := v(x)$ （因为 v_x 并不常见），类似地， $\mathbf{M}(x, x') = M_{xx'} := M(x, x')$ 。此外，所有求和符号都应替换为积分。例如，式 (19.1) 对应的方程组将推广为：

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \int_a^b L(x, x')y(x') dx' = f(x)$$

其中 (a, b) 是实轴上的一个区间，通常取为 $(-\infty, \infty)$ 。那么 $L(x, x')$ 的意义何在？它可以是两个变量的函数，但更有趣的是，它可以是一个微分算符。然而，微分算符是局域算符——即它是某点 x 处的各种阶导数的线性组合。因此，为使上述积分在 x 点“坍缩”，唯一的方式是令

$$L(x, x') = \delta(x - x')L(x) := \delta(x - x')\mathbf{L}_{x'} \quad (19.5)$$

其中 $\mathbf{L}_x$ 被定义为作用于变量 x 上的微分算符。

现在我们已经将微分算符推广为矩阵的对应对象，那么它的逆算符该如何定义？换言之，我们如何推广式 (19.3)？我们自然猜想到克罗尼克 δ 应被狄拉克 δ 函数所取代。带着这个猜想，我们将 (19.3) 推广为：

$$\int_a^b L(x, x') G(x', x_0) dx' = \delta(x - x_0)$$

将式 (19.5) 代入上式右边得到：

$$\int_a^b \delta(x - x') \mathbf{L}_x G(x', x_0) dx' = \delta(x - x_0)$$

或等价地：

$$\mathbf{L}_x G(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (19.6)$$

满足该方程的函数 $G(x, x_0)$ 称为微分算符 $\mathbf{L}_x$ 的格林函数 (Green's function)。如果我们能找到某个微分算符的格林函数，那么微分方程 $\mathbf{L}_x y(x) = f(x)$ 的解可以写成下列形式 (即式 (19.2) 的推广)：

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx' \quad (19.7)$$

为了验证这一点，我们只需将上式代入 $\mathbf{L}_x y(x)$ 中：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x y(x) &= \mathbf{L}_x \int_a^b G(x, x') f(x') dx' = \int_a^b \mathbf{L}_x G(x, x') f(x') dx' \\ &= \int_a^b \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \end{aligned}$$

这说明，只要知道微分算符的格林函数 $G(x, x')$ ，就可以通过 (19.7) 得到任意右端 $f(x)$ 对应的解 $y(x)$ 。

格林函数是求解微分方程的重要工具。常微分方程中只涉及一个变量的导数，而偏微分方程则涉及多个变量的导数。设 $\mathbf{x}$ 表示这些变量的集合，则微分算符可以记作 $\mathbf{L}_\mathbf{x}$ ，其对应的格林函数记为 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ，满足以下偏微分方程：

$$\mathbf{L}_\mathbf{x} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (19.8)$$

由于傅里叶变换能将微分运算转化为代数运算，同时狄拉克 δ 函数也具有非常简单的傅里叶逆变换，因此使用傅里叶变换技术可以便捷地求解格林函数。

例如，若 $\mathbf{L}_\mathbf{x}$ 是一个常系数的二阶偏微分算符 (关于 n 个变量)，我们仅对变量 $\mathbf{x}$ 作傅里叶变换，有

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (19.9)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (19.10)$$

将 (19.8) 两边同时进行傅里叶变换，得到

$$\int d^n k \tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') \mathbf{L}_\mathbf{x} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}$$

当微分算符 $\mathbf{L}_\mathbf{x}$ 作用于指数函数 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 时，将产生 k_j 分量的多项式 $p(k_j)$ （通常为 k_j 的二次多项式）。因此，比较两边的 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 系数，得到

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') p(k_j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \Rightarrow \tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}}{p(k_j)}$$

将其代入 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 的傅里叶逆变换式中，有

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{p(k_j)}$$

这表明格林函数仅依赖于变量之差 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 。因此我们得到

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{p(k_j)} \quad (19.11)$$

19.2 拉普拉斯算符的格林函数

已知拉普拉斯算符有 $p(k_j) = -k^2$ 。因此, 当 $n = 3$ 时, 式 (19.11) 变为

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} \quad (19.12)$$

为了计算该积分, 采用 k 空间中的球坐标, 并令极轴方向沿向量 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 则有 $d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi$, 代入上式得:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta}}{k^2}$$

φ 积分结果为 2π , 对 θ 积分令 $u = \cos \theta$, 积分化简为:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_1^{-1} du e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|u} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left. \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|u}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right|_1^{-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^\infty dk \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{ik} \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^\infty dk \frac{\sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{k} \end{aligned}$$

该积分的结果为 $\pi/2$, 于是最终得到拉普拉斯算符的格林函数为

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19.13)$$

由此, 结合 $\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 我们得到另一个重要结果:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (19.14)$$

利用拉普拉斯算符的格林函数, 我们可以求解静电学中的泊松方程:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r})$$

应用三维格林函数表示法 (参见式 (19.7)), 得到解为:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \int d^3x' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = k_e \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

这正是由体电荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 产生的静电势表达式。

19.3 热传导方程的格林函数

热传导方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa^2 \nabla^2 T(\mathbf{r}), \quad \text{或} \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa^2 \nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0 \quad (19.15)$$

这是一个包含四个变量的偏微分方程。我们将 t 视为第零个坐标， $\mathbf{r}$ 为其余三个空间变量；对应地，四维 k 空间由 k_0 和 $\mathbf{k}$ 组成。式 (19.11) 中的多项式为

$$p(k_j) = ik_0 + \kappa^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) := ik_0 + \kappa^2 k^2$$

因此，在 $n = 4$ 的情况下，式 (19.11) 给出

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{ik_0(x_0 - x'_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{ik_0 + \kappa^2 k^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0(x_0 - x'_0)}}{ik_0 + \kappa^2 k^2} \end{aligned} \quad (19.16)$$

先做 k_0 积分。将分子分母同乘 $-i$ ，使分母变为 $k_0 - i\kappa^2 k^2$ ，然后使用留数定理并选择上半平面闭合路径（假设 $x_0 - x'_0 > 0$ ），被积函数在 $k_0 = i\kappa^2 k^2$ 处有一阶极点，因此有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0(x_0 - x'_0)}}{ik_0 + \kappa^2 k^2} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0(x_0 - x'_0)}}{k_0 - i\kappa^2 k^2} = -i(2\pi i) e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0)}$$

将上式代入 (19.16)，并在三维 $\mathbf{k}$ 空间中引入球坐标，取极轴沿 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ，有

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} k^2 e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0)} dk \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta} \end{aligned}$$

φ 的积分结果为 2π ，而类似于拉普拉斯算子的情形， θ 积分结果为 $2 \sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 。因为 k 积分的被积函数关于 k 是偶函数，我们可以将积分下限延拓到 $-\infty$ ，并引入因子 $1/2$ ，于是式 (19.16) 变为：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{2}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{\infty} k e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0)} \sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0)} \sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dk \end{aligned}$$

由于正弦函数是复指数的虚部，可以写作：

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0) + ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dk \quad (19.17)$$

将指数配方完成平方：

$$-\kappa^2 k^2 (x_0 - x'_0) + ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\kappa^2 (x_0 - x'_0) \left(k - \frac{i|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\kappa^2 (x_0 - x'_0)} \right)^2 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\kappa^2 (x_0 - x'_0)}$$

记括号中的虚数为 $i\alpha$ ，代入 (19.17) 式得：

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\kappa^2 (x_0 - x'_0)}}}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\kappa^2 (x_0 - x'_0) (k - i\alpha)^2} dk \quad (19.18)$$

变换变量 $u = k - i\alpha$ ，则积分变为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u + i\alpha) e^{-\kappa^2(x_0 - x'_0)u^2} du = i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2(x_0 - x'_0)u^2} du = i\alpha \sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2(x_0 - x'_0)}}$$

其中关于 u 的奇函数部分积分为零，同时利用了高斯积分结果。将 $\alpha = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/(2\kappa^2(x_0 - x'_0))$ 代入 (19.18) 式，得：

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\kappa^2(x_0 - x'_0)}}}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\kappa^2(x_0 - x'_0)} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2(x_0 - x'_0)}}$$

若记 $x_0 = t$ 且设 $x'_0 = t' = 0$ ，最终得到热传导方程的格林函数：

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\kappa^2 t}}}{(4\pi\kappa^2 t)^{3/2}} \quad (19.19)$$

19.4 波动方程的格林函数

波动方程写作：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi = 0 \quad (19.20)$$

其中 c 是波速，该方程是四个变量的偏微分方程。与热传导方程类似，我们将时间变量标记为第 0 个坐标。相应的 $p(k_j)$ 多项式为

$$p(k_j) = -\frac{k_0^2}{c^2} + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 := -\frac{k_0^2}{c^2} + k^2$$

根据傅里叶变换形式，格林函数可以写作：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{ik_0(x_0 - x'_0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k_0^2/c^2 - k^2} \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - c^2 k^2} \end{aligned} \quad (19.21)$$

其中我们令 $t = x_0$ 且设 $x'_0 = t' = 0$ 。

我们接下来专注于 k_0 的积分，并使用留数定理对其求解。被积函数在实轴上有两个极点 $k_0 = \pm ck$ ，如何处理这些极点将导致不同的格林函数。我们的一种处理方式是将极点略微上移，即赋予它们一个无穷小的正虚部。

若 $t > 0$ ，积分路径应在上半平面并假定大圆弧部分贡献为零；若 $t < 0$ ，则积分路径应在下半平面，此时因无包围极点，积分为零。记被积函数为 f ，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - c^2 k^2} = 2\pi i [\text{Res}(f(ck)) + \text{Res}(f(-ck))]$$

留数分别为：

$$\text{Res}(f(ck)) = \frac{e^{ickt}}{2ck}, \quad \text{Res}(f(-ck)) = -\frac{e^{-ickt}}{2ck}$$

因此 k_0 的积分为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - c^2 k^2} = -2\pi \frac{\sin(ckt)}{ck}$$

代入式 (19.21)，得到：

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin(ckt)}{k}$$

使用 k 空间的球坐标积分后，得到：

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) = \frac{2c}{(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{\infty} dk \sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sin(ckt)$$

化为复指数并整理得：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) &= -\frac{c}{4(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{ick(t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)} - e^{ick(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)} \right] \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[2\pi\delta\left(t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) - 2\pi\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (19.22)$$

由于 $t > 0$ ，第一项 $\delta(t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ 为零。因此波动方程的格林函数最终形式为：

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) = \frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19.23)$$

下标 ret 表示推迟格林函数。由 δ 函数可知， G_{ret} 仅在波动传播时间 $t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ 时不为零。若我们将极点移入下半平面，并设 $t < 0$ ，则将得到提前格林函数：

$$G_{\text{adv}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) = \frac{\delta\left(t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19.24)$$

20 变分法初步

在典型的多变量极值问题中，我们给定一个 n 变量函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，要求找出使该函数取得极大或极小值的变量组。常规做法是将函数对每个变量的偏导数设为零，从而构造出待求解的方程组。

从几何角度看， f 是 n 维空间中的函数，该问题即是在该空间中寻找函数值相较于邻域最大或最小的点。还有另一种几何视角：将变量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 理解为一条二维坐标系中的折线路径。横坐标限定为整数 $1, 2, \dots, n$ ，每个变量 x_i 对应于点 (i, x_i) 。连接相邻点便得一条路径，如图 112 所示。

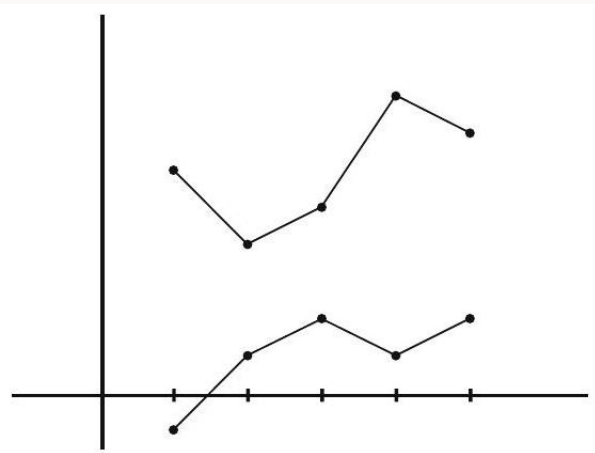


图 112: 对于每个整数 i ，选择实数 x_i 并绘制点 (i, x_i) 。连接这些点形成路径，图中显示的是 $n = 5$ 的两条不同路径。

现在可将极值问题表述为路径之间的比较：找出在所有可能路径中，使 f 相较于邻近路径取极值的那条路径。为实现这一目标，我们对路径中某点的坐标进行扰动。设 x_α 为一个变量，其中 α 不一定是 1 到 n 之间的整数。我们对 x_α 求偏导，并令其为零：

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{\alpha i} = 0 \quad (20.1)$$

当 α 不是 $1, \dots, n$ 中的整数时， f 不依赖于 x_α ，因此左边恒为零；当 α 属于该整数集合时，式 (20.1) 就是我们需要满足的极值条件之一。

20.1 变分问题

我们在上一节中以路径形式讨论极值问题的处理，是为了准备处理涉及平滑路径变化的情形。一类典型的变分问题包含一个其值依赖于路径的函数，即它的输入是一条路径，输出是一个实数。

我们称这样的对象为**泛函** (functional)，因为它的自变量不是一组数，而是一个函数。如果我们用 $\mathbf{L}$ 表示一个泛函，且 $x(t)$ 表示 tx 平面上的一条路径，那么该路径下泛函的值记为 $\mathbf{L}[x]$ 。

最常见的泛函形式是对某个函数 $L(x, \dot{x}, t)$ 沿某个区间 (a, b) 做积分，其中 $x(t)$ 是路径， $\dot{x}(t)$ 是其导数，即

$$\mathbf{L}[x] = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (20.2)$$

对于每一条路径， $L(x, \dot{x}, t)$ 在该路径上成为 t 的一个函数，可以对其进行积分以得到一个数值。变分问题的目标是寻找使得该泛函取得极大或极小值的路径。

20.1.1 欧拉-拉格朗日方程

回到式 (20.2)，我们思考是否存在某种“对路径求导”的过程，通过将其设为零来求解最优路径。这种对函数求导的过程称为**泛函导数** (functional derivative)，通常用 δ 而不是 ∂ 表示。我们写出：

$$\frac{\delta \mathbf{L}[x]}{\delta x(\tau)} = \frac{\delta}{\delta x(\tau)} \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \int_a^b \frac{\delta}{\delta x(\tau)} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (20.3)$$

类比于式 (20.1)，并注意到 L 是 x 、 $\dot{x}$ 和 t 的普通函数（而非泛函），我们有：

$$\frac{\delta}{\delta x(\tau)} L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\delta x(t)}{\delta x(\tau)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\delta \dot{x}(t)}{\delta x(\tau)} \quad (20.4)$$

其中， t 独立于 $x(\tau)$ 。在离散情形中， $\partial x_i / \partial x_\alpha = \delta_{\alpha i}$ ，该结果在连续情形中的推广就是**狄拉克 delta 函数**。严格的推导超出本课程范围，我们直接写出这一基本泛函导数公式：

$$\frac{\delta x(t)}{\delta x(\tau)} = \delta(t - \tau) \quad (20.5)$$

我们继续讨论式 (20.4) 中第二项的泛函导数。利用导数的定义以及式 (20.5)，可得：

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{x}(t)}{\delta x(\tau)} &= \frac{\delta}{\delta x(\tau)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\delta x(t + \epsilon)}{\delta x(\tau)} - \frac{\delta x(t)}{\delta x(\tau)} \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (\delta(t + \epsilon - \tau) - \delta(t - \tau)) \right] = \frac{d}{dt} \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (20.6)$$

将 (20.5) 与 (20.6) 代入 (20.4)，再代入 (20.3)，得到：

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{L}[x]}{\delta x(\tau)} &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta(t - \tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta(t - \tau) \right] dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial x}(\tau) - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\tau) \right) \end{aligned} \quad (20.7)$$

其中，最后一步使用了狄拉克 **delta** 函数及其导数的性质。我们已假设 $\tau \in (a, b)$ 。得到了泛函导数之后，将其设为零，即得到使泛函 $\mathbf{L}[x]$ 取极值的路径 $x(t)$ 所满足的方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (20.8)$$

这就是**欧拉-拉格朗日方程**（Euler-Lagrange Equation），它是变分法的核心方程。只要给定函数 $L(x, \dot{x}, t)$ ，我们就可以计算其偏导数，并代入式 (20.8)，进而求解得到满足变分条件的路径。需要指出的是，路径函数可以写成 $y(x)$ 、 $x(t)$ 或其他形式，具体取决于问题中所用的变量。

20.1.2 贝尔特拉米恒等式

大多数变分问题中，被积函数 L 与时间 t 无关。在这种情况下，欧拉-拉格朗日方程可以大大简化。考虑 L 对时间 t 的全导数：

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} \quad (20.9)$$

由欧拉-拉格朗日方程 (20.8) 可知：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$$

将其代入 (20.9) 得：

$$\frac{dL}{dt} = \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$$

因此，

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

这意味着括号中的表达式在整个路径上恒为常数，从而得到 **贝尔特拉米 (Beltrami) 恒等式**：

$$L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C \quad (20.10)$$

其中 C 是常数。该恒等式在 L 不含显式时间依赖时极为有用，它提供了一种一阶方法来求解变分问题。

20.1.3 多个依赖变量

前述的路径函数（公式 (20.2)）仅包含一个依赖变量。然而，我们也可以考虑在 m 维空间中的路径，其中 L 依赖于多个变量 $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha=1}^m$ 及其导数。这一推广是直接的：将公式 (20.3) 中的 $x(\tau)$ 替换为 $x_\alpha(\tau)$ ，则公式 (20.4) 改写为：

$$\frac{\delta}{\delta x_\alpha(\tau)} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \sum_{\beta=1}^m \left[\frac{\partial L}{\partial x_\beta} \frac{\delta x_\beta(t)}{\delta x_\alpha(\tau)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\beta} \frac{\delta \dot{x}_\beta(t)}{\delta x_\alpha(\tau)} \right],$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 表示多维路径。我们需要使用如下推广的函数导数结果（类似于 (20.5) 和 (20.6)）：

$$\frac{\delta x_\beta(t)}{\delta x_\alpha(\tau)} = \delta_{\alpha\beta} \delta(t - \tau), \quad \frac{\delta \dot{x}_\beta(t)}{\delta x_\alpha(\tau)} = \delta_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \delta(t - \tau) \quad (20.11)$$

将这些结果代入上式，得到：

$$\frac{\delta}{\delta x_\alpha(\tau)} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} \delta(t - \tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta(t - \tau),$$

这与公式 (20.7) 形式相同，只是将 x 和 $\dot{x}$ 替换为 x_α 和 $\dot{x}_\alpha$ 。因此，我们得到多变量情况下的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (20.12)$$

20.1.4 多个自变量

公式 (20.12) 是欧拉-拉格朗日方程的一种推广形式，它仍然是关于路径的（尽管路径可能在多维空间中是弯曲的）。另一种重要的推广是将路径拓展为曲面：此时，依赖变量是若干个自变量的函数。考虑一个函数 ϕ ，它依赖于 m 个自变量，记为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 。对应的泛函为：

$$\mathbf{L}[\phi] = \iint_{\Omega} d^m x \mathcal{L}(\phi; \phi_{,1}, \phi_{,2}, \dots, \phi_{,m}; \mathbf{x}) \quad (20.13)$$

其中 $\phi_{,\alpha} := \partial\phi/\partial x_\alpha$ 表示 ϕ 对 x_α 的偏导数， Ω 是 m 维空间中的区域。注意：我们使用 $\mathcal{L}$ 而非 L 表示被积函数，是为了表明该积分是多变量的体积积分。

泛函导数形式 (20.4) 在此推广为：

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{y})} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{y})} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} \frac{\delta\phi_{,\alpha}(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{y})} \quad (20.14)$$

其中用到了如下推广的变分关系：

$$\frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \frac{\delta\phi_{,\alpha}(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{y})} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (20.15)$$

将上述结果代入 (20.13) 的泛函导数并令其为零，可得多变量形式的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} \right) = 0 \quad (20.16)$$

若有多个依赖变量 $\{\phi^i\}_{i=1}^N$ ，记作 Φ ，以及多个自变量 $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ ，则泛函形式为：

$$\mathbf{L}[\Phi] = \iint_{\Omega} d^m x \mathcal{L}(\Phi; \Phi_{,1}, \dots, \Phi_{,m}; \mathbf{x}) \quad (20.17)$$

泛函导数推广为：

$$\frac{\delta}{\delta\phi^i(\mathbf{y})} \mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^j} \frac{\delta\phi^j(\mathbf{x})}{\delta\phi^i(\mathbf{y})} + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}^j} \frac{\delta\phi_{,\alpha}^j(\mathbf{x})}{\delta\phi^i(\mathbf{y})} \quad (20.18)$$

其中，

$$\frac{\delta\phi^j(\mathbf{x})}{\delta\phi^i(\mathbf{y})} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \frac{\delta\phi_{,\alpha}^j(\mathbf{x})}{\delta\phi^i(\mathbf{y})} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (20.19)$$

代入后可得一般形式的欧拉-拉格朗日方程组：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}^i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20.20)$$

这一方程在场论、连续介质力学、广义相对论等领域中具有广泛应用。

20.2 二次变分

欧拉-拉格朗日方程是通过令一阶变分 (20.7) 为零得到的。这与多变量微积分中的极值问题类似：此过程只能判断函数在某点是否取得极值，但无法确定是极大值还是极小值。为了进一步判断其性质，我们需要像多变量函数一样引入“二阶导数检验”。

在微积分中，最简单的判断方法是利用泰勒展开，并忽略高于二阶的项，以判断该点附近的函数变化趋势。设 f 是 N 个自变量 $\{x^i\}_{i=1}^N := \mathbf{x}$ 的函数，在点 $\mathbf{x}_0$ 的二阶泰勒展开为：

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_{0i}) f_{,i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) f_{,ij}(\mathbf{x}_0) \quad (20.21)$$

其中记号约定为：

$$f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{,ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的极值点，则有 $f_{,i}(\mathbf{x}_0) = 0$ ，从而上式化为：

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) f_{,ij}(\mathbf{x}_0) := \delta_2 f(\mathbf{x}_0) \quad (20.22)$$

我们将右边的二次型记为 $\delta_2 f(\mathbf{x}_0)$ ，称为函数 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 处的二次变分 (second variation)。因此，多变量函数的极值判别法则可以表述如下：

- 若对于任意邻近 $\mathbf{x}_0$ 的点，二次变分 $\delta_2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ ，则 $\mathbf{x}_0$ 是极小值点；
- 若对于任意邻近 $\mathbf{x}_0$ 的点，二次变分 $\delta_2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ ，则 $\mathbf{x}_0$ 是极大值点。

将多变量极值问题推广到变分问题依然遵循“从离散到连续”的思路。对于最一般形式的泛函（见式 (20.17)），其对应的二次变分为：

$$\delta_2 \mathbf{L}[\Phi_0] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \iint_{\Omega} d^m x \iint_{\Omega} d^m y (\phi^i(\mathbf{x}) - \phi_0^i(\mathbf{x})) (\phi^j(\mathbf{y}) - \phi_0^j(\mathbf{y})) \frac{\delta^2 \mathbf{L}}{\delta \phi^i(\mathbf{x}) \delta \phi^j(\mathbf{y})} [\Phi_0] \quad (20.23)$$

其中 Φ_0 是欧拉-拉格朗日方程的解，右侧最后一项表示在该解处取二次变分导数。对于只有一个从属变量 ϕ 而存在多个自变量的情形，式 (20.23) 简化为：

$$\delta_2 \mathbf{L}[\phi_0] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} d^m x \iint_{\Omega} d^m y (\phi(\mathbf{x}) - \phi_0(\mathbf{x})) (\phi(\mathbf{y}) - \phi_0(\mathbf{y})) \frac{\delta^2 \mathbf{L}}{\delta \phi(\mathbf{x}) \delta \phi(\mathbf{y})} [\phi_0] \quad (20.24)$$

若只有一个自变量，但多个从属变量 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ ，则二次变分为：

$$\delta_2 \mathbf{L}[\mathbf{x}_0] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_a^b dt \int_a^b d\tau (x_i(t) - x_{i0}(t)) (x_j(\tau) - x_{j0}(\tau)) \frac{\delta^2 \mathbf{L}}{\delta x_i(t) \delta x_j(\tau)} [\mathbf{x}_0] \quad (20.25)$$

而对于最基本的情形——一个自变量和一个从属变量——二次变分为：

$$\delta_2 \mathbf{L}[x_0] = \frac{1}{2} \int_a^b dt \int_a^b d\tau (x(t) - x_0(t)) (x(\tau) - x_0(\tau)) \frac{\delta^2 \mathbf{L}}{\delta x(t) \delta x(\tau)} [x_0] \quad (20.26)$$

在计算二次变分时，我们还需涉及对从属变量的高阶导数的变分导数。特别地，有如下公式：

$$\frac{\delta \phi_{,\alpha\beta}^j(\mathbf{x})}{\delta \phi^i(\mathbf{y})} = \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (20.27)$$

20.3 带约束的变分问题

前面讨论的变分问题都是在边界条件下求解的, 即所有的“路径”或极值候选都必须通过同样的边界。在许多实际应用中, 还会存在其他辅助条件或约束条件, 这些条件同样需要被满足。一个典型的例子是: 在周长固定的前提下, 求使面积最大的封闭曲线。处理这类带有约束的变分问题最优雅的方法是使用拉格朗日乘子法。

假设我们希望寻找某条曲线, 不仅使泛函

$$\mathbf{L}[x] = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (20.28)$$

取得极值, 而且还要求另一个泛函

$$\mathbf{K}[x] = \int_a^b G(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (20.29)$$

取固定值 l 。这种类型的问题称为“等周问题”(isoperimetric problem)。与多变量微积分中的拉格朗日乘子法完全类似, 我们构造新的函数 $L + \lambda G$, 并对其进行极值化处理。这样, 所需满足的欧拉-拉格朗日方程变为:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (20.30)$$

其中 λ 是拉格朗日乘子, 它需要根据约束条件 $\mathbf{K}[x] = l$ 来确定。

例 20.1 设在上半平面中, 所有长度为 l 的曲线都通过点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$, 问: 哪条曲线与区间 $[-a, a]$ 所围成的面积最大? 所求的函数 $y(x)$ 需使泛函

$$\mathbf{L}[y] = \int_{-a}^a y dx \quad (20.31)$$

取得极大值, 且满足以下约束条件:

$$y(-a) = 0 = y(a), \quad \mathbf{K}[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l \quad (20.32)$$

由公式 (20.30), 代入 $L = y, G = \sqrt{1 + y'^2}$, 可得欧拉-拉格朗日方程:

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (20.33)$$

对上式积分得到:

$$x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \quad (20.34)$$

解出 y' 得:

$$y' = \pm \frac{C_1 - x}{\sqrt{\lambda^2 - (C_1 - x)^2}} \quad (20.35)$$

再次积分, 得到 $y(x)$ 的表达式:

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (C_1 - x)^2} + C_2 \quad (20.36)$$

化为标准形式可得：

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 \quad (20.37)$$

这是一个以 (C_1, C_2) 为圆心、 λ 为半径的圆。三个未知数 C_1 、 C_2 和 λ 可由边界条件与约束条件确定：

$$y(-a) = 0 = y(a), \quad \mathbf{K}[y] = l \quad (20.38)$$

另一类具有约束的变分问题出现在具有一个自变量和多个因变量的情形中，其约束条件为：

$$g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = 0 \quad (20.39)$$

这类问题称为有限约束问题 (finite constraint problem)。

拉格朗日乘子法 设我们需要在超曲面约束条件 $g(\mathbf{x}) = 0$ 下，求 n 元函数 $f(\mathbf{x})$ 的极值，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

在约束条件下， $d\mathbf{x}$ 被限制在曲面 $g(\mathbf{x}) = 0$ 上。唯一能与曲面上任意 $d\mathbf{x}$ 点积为零的 n 维向量是曲面的法向量（或其倍数）。因此，若要使 $(\nabla f) \cdot d\mathbf{x} = 0$ 对所有约束曲面上的 $d\mathbf{x}$ 成立，则 ∇f 必须是曲面法向量的倍数。而该法向量正是 ∇g 。由此得到极值条件：

$$\nabla f = -\lambda \nabla g \quad \text{或} \quad \nabla f + \lambda \nabla g = 0$$

其中 λ 称为拉格朗日乘子，为任意常数。这表明：为求约束条件 $g(\mathbf{x}) = 0$ 下函数 f 的极值，可构造 $n + 1$ 元函数：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

并对 F 进行无约束极值求解。其极值方程为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (12.30)$$

末式即为约束条件，它以极值方程的形式自然出现。

极值问题可能包含多个约束方程，形式如下：

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) := g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (12.31)$$

我们可以通过以下步骤逐步消除约束：将目标函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 替换为

$$F_1(\mathbf{x}; \lambda_1) := f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}),$$

此时 F_1 仅需满足剩余的 $m - 1$ 个约束方程。进一步定义

$$F_2(\mathbf{x}; \lambda_1, \lambda_2) := F_1(\mathbf{x}; \lambda_1) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x})$$

依此类推，可通过定义以下函数消除全部约束：

$$F(\mathbf{x}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) := f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (12.32)$$

对该函数进行无约束极值求解，即可得到极值方程。

我们回到具有约束的变分问题，将上述离散指标 j 被连续变量 t 替代。对应地，拉格朗日乘子也被函数 $\lambda(t)$ 所取代，同时原来的求和也变成对 t 的积分。因此，变分问题变成求解下列泛函的极值：

$$\int_a^b \{L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \lambda(t)g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)\} dt \quad (20.40)$$

对应的欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20.41)$$

若存在多个约束：

$$g_\alpha(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (20.42)$$

则引入 m 个拉格朗日乘子 $\lambda_\alpha(t)$ ，相应的泛函为：

$$\int_a^b \left\{ L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha(t) g_\alpha(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right\} dt \quad (20.43)$$

由此得到的欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{\alpha=1}^m \left[\lambda_\alpha \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \dot{x}_i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20.44)$$

例 20.2 在所有位于以原点为中心、半径为 a 的球面上，且通过两点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 的曲线中，寻找最短路径。这是一个带有限约束的变分问题，其中泛函为

$$\mathbf{L}[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \quad (20.45)$$

约束条件为

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0. \quad (20.46)$$

我们引入拉格朗日乘子 $\lambda(x)$ ，构造新的泛函：

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x) (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \right\} dx. \quad (20.47)$$

对其进行变分，得到欧拉-拉格朗日方程：

$$2y\lambda(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0, \quad (20.48)$$

$$2z\lambda(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0. \quad (20.49)$$

解该方程组得到包含四个积分常数的一般解。这些常数可由边界条件确定：

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1, & y(x_2) &= y_2, \\ z(x_1) &= z_1, & z(x_2) &= z_2. \end{aligned}$$