

数学物理方法荣誉课课题

邵煜

复旦大学

2025 年春

目录

1	强 CP 问题与轴子	3
2	不同物理系统中的几何相位	3
3	费曼积分	3
4	共形自举与光线算符	4
5	S 矩阵及其解析性	4
6	爱因斯坦场方程的求解	4
7	区域分解方法	5
8	费曼部分子模型与质子的结构	5

1 强 CP 问题与轴子

“强 CP 破坏”问题是粒子物理学悬而未决的重大疑难之一。简单说来，描述强相互作用的量子色动力学（QCD）拉氏量里面允许存在一个破坏 CP 对称性的项，记为 q 。到目前为止，实验结果为 q 的数值设定了严格的上限： $|q|$ 应小于 10 亿分之一。为什么 q 这么小？它可能严格等于零吗？从理论的自然性出发，一个特别小的物理量往往是不自然的，因为它的数值很可能依赖于其他物理参数的微调，除非它由于某种对称性的限制而精确为零。目前解释强相互作用中不可观测的 CP 破坏效应的理论图像主要是，假设 QCD 拉氏量存在一种整体的 U(1) 对称性。该对称性可以禁闭破坏 CP 守恒的 q 项。然而，PQ 对称性在极高能标（10 亿至 1 万亿 GeV）自发破缺以后会产生出一个电中性、无自旋、小质量的粒子，通常称为轴子（Axion）。这一有趣的非标准模型粒子至今还没有被实验观测到。许多理论家猜想，如果轴子确实存在的话，它或许是宇宙的暗物质的可能候选者。

- Matthew Reece, (No) Global Symmetries to Axion Physics, e-Print: 2304.08512 [hep-ph]

2 不同物理系统中的几何相位

几何相位 (geometric phase or Berry phase) 是一个系统当哈密顿量的参数做周期性变化时相位的变化，反映了哈密顿量的参数空间的几何和拓扑性质，用纤维丛的语言可以给出贝里相位 (Berry phase) 最准确和简洁的描述。贝里相位及各种推广的几何相位在经典力学、量子力学、光学、凝聚态、原子分子物理等各个分支中都有重要的应用。

- B. Zwiebach, Mastering Quantum Mechanics (MIT Press, 2022), Chapter 28.
- M. V. Berry, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences 392, 45 (1984).
- D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, Reviews of Modern Physics 82, 1959 (2010).

3 费曼积分

人们对电子反常磁矩 ($g - 2$) 的理论预测在极高的精度下与实验结果相符，达到 10^{-9} 级别的精确度。这一惊人的一致性展示了量子电动力学 (QED) 的成功，使其成为目前实验验证最精确的物理理论之一。这一成功的关键在于高阶微扰计算，而费曼积分在其中起到了不可或缺的作用。在量子场论中，任何超越最低阶微扰计算的过程都不可避免地涉及费曼积分。每一个高阶修正都对应对应更复杂的费曼图，而计算这些图所需的数学工具便是费曼积分。通过精确求解这些积分，科学家们能够计算出各种粒子相互作用的微小修正，从而与实验测量结果进行精确比对。不仅如此，费曼积分在数学研究中也具有深远的意义。它们与解析函数、特殊函数等多个数学分支紧密相连，为现代数学提供了丰富的具体实例。

- Stefan Weinzierl, Feynman Integrals: A Comprehensive Treatment for Students and Researchers,

4 共形自举与光线算符

共形场论 (Conformal Field Theory, CFT) 是一类在共形对称性下不变的场论, 在统计物理、弦论以及量子场论中扮演着核心角色。共形自举 (Conformal Bootstrap) 方法是一种研究共形场论的重要工具, 它不依赖于拉格朗日形式, 而是直接利用对称性、相关物理假设以及数学自洽性条件来约束关联函数的可能形式。光线算符是共形场论中的一种特殊算符, 通常由局域算子沿着类光方向积分得到, 它们可以捕捉能动量流以及粒子散射的非平庸特征。

- David Simmons-Duffin, The Conformal Bootstrap, e-Print: 1602.07982 [hep-th]
- Petr Kravchuk, David Simmons-Duffin, Light-ray operators in conformal field theory, e-Print: 1805.00098 [hep-th]

5 S 矩阵及其解析性

S 矩阵描述微观粒子散射过程, 表述在某一特定相互作用下, 系统初始状态随时间演化的关系。但 S 矩阵的具有一些不依赖于具体相互作用的普遍性质, 如么正性和解析性。在散射理论中, 一个很重要的问题是, 因果性如何体现在散射振幅的性质中? 这个问题自然地引出了 S 矩阵的解析性问题。

- J. J. Sakurai and Jim Napolitano, Modern Quantum Mechanics (Cambridge University Press, 2017), Chapter 6.
- S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields (Cambridge University Press, Cambridge, 2005), Volume 1, Chapters 2 and 3.
- 郑汉青, 量子场论 (上), 北京大学出版社, 2018, 第七章。

6 爱因斯坦场方程的求解

爱因斯坦场方程是广义相对论的核心方程, 给出了时空弯曲与物质分布的关系。它是高度非线性的偏微分方程, 其求解通常情况下非常复杂, 事实上目前只发现了极少数特殊解。通常的求解方法包括弱场近似 (如引力波解)、基于某些对称性假设 (如 Schwarzschild 解、Friedmann 解) 等等。此外数值相对论也是一个方兴未艾的课题, 鉴于广义相对论在时间演化等方面与其他理论有概念上的不同, 相应的数值解法有许多特殊之处。

- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (1972), Chapter 8.

7 区域分解方法

区域分解方法（**Method of Regions, MoR**）是一种围绕不同的极限对圈积分进行渐近级数展开的系统方法。具体来说，该方法通过将积分区域分割成不同的区域，并在每个区域内对被积函数进行适当展开来实现。在有效理论中，不同的区域由不同的有效场论描述。通过区域技术得到的展开积分，与有效场论的费曼图之间存在一一对应关系。如果仅仅是为了在小参数下对某些微扰计算结果进行展开，则可以直接使用区域技术，而无需构造有效拉格朗日量。然而，在推导重求和公式时，采用有效场论具有一些关键优势。具体而言，有效拉格朗日量可用于：推导因子化定理，以及使用重整化群技术，对耦合常数中对数增强项进行所有阶重求和。

- Thomas Becher, Alessandro Broggio, Andrea Ferroglia, Introduction to Soft-Collinear Effective Theory, e-Print: 1410.1892, Chapter 2
- M. Beneke and V. A. Smirnov, Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold, Nucl. Phys. B522 (1998) 321–344, [hep-ph/9711391]
- A. Pak, A. Smirnov, Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals, Eur.Phys.J.C 71 (2011) 1626, e-Print: 1011.4863

8 费曼部分子模型与质子的结构

费曼部分子模型（**Parton Model**）是费曼在 1969 年提出的一种理论框架，用于描述强相互作用下的高能深度非弹性散射。该模型的核心思想是，在高能极限下，质子可以被看作由一组称为部分子（**partons**）的点状自由粒子组成，而这些部分子可以与入射的高能探测粒子（如光子或电子）发生散射。在量子场论中部分子模型可以通过类光的关联函数描述，该关联函数也揭示了质子的内部结构。

- Bryan Webber, James Stirling, and R. Keith Ellis, QCD and Collider Physics, Chapter 4
- Graudenz, M. Hampel, A. Vogt, Christoph Berger, Z.Phys.C 70 (1996) 77-82, hep-ph/9506333
- Renaud Boussarie, *et. al.*, TMD Handbook, e-Print: 2304.03302